物性物理科学 I

注意：問題 1 から 3 までの各問に解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．1 つの問題の解答が解答用紙 2 枚にわたるときは，2 枚目にも問題の番号を書き，2 枚目であることを明示すること．

問題 1

図 1 に示したように，水平に固定された板の上の点 O に開けられた穴を 1 本のひもが貫通している．ひもの太さと質量，穴の大きさ，板の厚みは無視でき，ひもは固定されておらず穴を通して動くことができる．ひもと板の間に摩擦力は働かないとする．このひもの両端に質量 m_{A} の質点 A と質量 m_{B} の質点 B が取り付けられている．点 O を原点として xyz 座標軸を図 1 のようにとり，z 軸は鉛直方向で上向きを正にとる．質点 A は常に板の上の水平面内（$z = 0$ の面内）で点 O を支点として回転運動しており，質点 A と板との間の摩擦は無いものとする．質点 B の運動は $y = 0$ の面内に拘束されているとする．ひもの全長は L で，ひもは点 O で折れ曲がっている以外は常に一直線に張っており，弛みや捻れ，伸縮はないものとする．線分 OA の長さを ℓ $(0 \leq \ell \leq L)$，x 軸と OA のなす角を φ，z 軸の負方向と線分 OB のなす角を θ $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ として，この系の一般化座標を (θ, φ, ℓ) ととる．また，質点 A，B には重力が働くとして重力加速度は g とする．以下の問いに答えよ．答えの導出過程も記すこと．

[1] この系のラグランジアンを ℓ，θ，φ とそれらの時間微分，$\dot{\ell}$，$\dot{\theta}$，$\dot{\varphi}$，および L，m_{A}，m_{B}，g を用いて表せ．ただし，重力ポテンシャルによる位置エネルギーの原点を $z = 0$ にとること．

[2] オイラーラグランジュ方程式より，θ，φ，ℓ の満たす運動方程式を求めよ．

[3] 質点 A の角運動量が保存していることを示せ．以下ではこの角運動量の大きさを J とおく．

[4] 質点 B の運動が $\theta = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ を満たしている場合を考える．質点 A が点 O を支点として等速回転運動していて，ひもに働く力が釣り合ったときの ℓ を ℓ_0 とおく．ℓ_0 を $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$，$J$，$L$，$g$ のうち，必要なものを用いて表せ．

[5] 時刻 $t < 0$ において，問 [4] のように質点 A が点 O を支点として等速回転運動していて，かつ $\theta = 0$，$\ell = \ell_0$ で質点 B が静止しているとする．時刻 $t = 0$ で質点 B を釣り合い位置から，鉛直下向きに長さ a だけゆっくりずらし，時刻 $t = t_0 > 0$ で静かに放すと，質点 B は鉛直方向に単振動を開始した．$a \ll \ell_0$ であるとする．運動方程式を解いて $t > t_0$ での ℓ を時間 t の関数として求めよ．ただし，$\ell = \ell_0 + \tilde{\ell}(t)$ とおいて，時間依存する部分 $\tilde{\ell}(t)$ の大きさは ℓ_0 に対して十分小さいとして，運動方程式を $\tilde{\ell}(t)/\ell_0$ について 1 次まで展開する近似で考えよ．答えは $m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}$，$J$，$\ell_0$，$a$，$t$，$t_0$ を用いて表せ．

(次ページにつづく)

問題 1 のつづき

[6] 問 [5] において時刻 $t = t_1 > t_0$ で，質点 B に x 軸に平行な方向に小さい撃力を加えたところ，質点 B は $y = 0$ の面内で点 O を支点として振り子運動をはじめた．この振り子運動の振幅は十分小さく，$\sin\theta \approx \theta$ と近似してよい．また，$a \ll L - \ell_0$ であるとして，$L - \ell \approx L - \ell_0$ と近似できるとする．さらに，質点 B の振り子運動に比べて ℓ の時間変化は十分ゆっくりであるとして，十分短い時間の間では，θ についての運動方程式において，$\frac{d\ell}{dt}$ を時間に依存しない定数 $v \neq 0$ で近似してよいとする．また，$g(L - \ell_0) > v^2$ の関係が満たされているものとする．この短い時間の間での，θ についての運動方程式の一般解を求めよ．ただし，一般解を表すのに必要な定係数は適切に定義して導入せよ．

[7] 問 [6] の 質点 B の振り子運動について定性的に説明せよ．特に $v = 0$ と仮定した場合との違い，および ℓ が時間経過とともに増大する場合と減少する場合の違いに着目して答えよ．

[8] ℓ の振動運動の振幅が十分小さく，かつ，$\sin\theta \approx \theta$ と近似できるとする．このとき，振り子運動する質点 B のエネルギー E_B は，$x \equiv (L - \ell)\theta$ として，x を変位とする 1 次元調和振動子の式，

$$E_\mathrm{B} = \frac{m_\mathrm{B}}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{m_\mathrm{B}\omega^2}{2}x^2.$$

で近似できる．ここで，$\omega = \sqrt{g/(L - \ell_0)}$ である．$\tilde{\ell}$ について 1 次までとる近似が適用できるとして，ℓ の振動運動が問 [5] で求めたもので与えられるとする．ℓ の振動運動の 1 周期 T_ℓ の間での E_B の変化量を，$\tilde{\ell}$ について 1 次までとる近似で考える．ある時刻 t_a で $\ell = \ell_0$，$x = 0$ であるとする．時刻 t_a から時刻 $t_a + T_\ell$ の間での E_B の変化量の絶対値 $|\Delta E_\mathrm{B}|$ は，ℓ の振動運動の角振動数 ω_ℓ と ω との比に強く依存する．以下の選択肢のうち，$|\Delta E_\mathrm{B}|$ が最も大きいのはどれか，理由とともに答えよ．(ヒント：時刻 t_a から t_b の間の E_B の変化量は $\Delta E_\mathrm{B} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dE_\mathrm{B}}{dt} dt$ と書けることに注意)

選択肢：　（ア） $\omega = 4\omega_\ell$　　（イ） $\omega = 2\omega_\ell$　　（ウ） $\omega = \omega_\ell$　　（エ） $\omega = 0.5\omega_\ell$

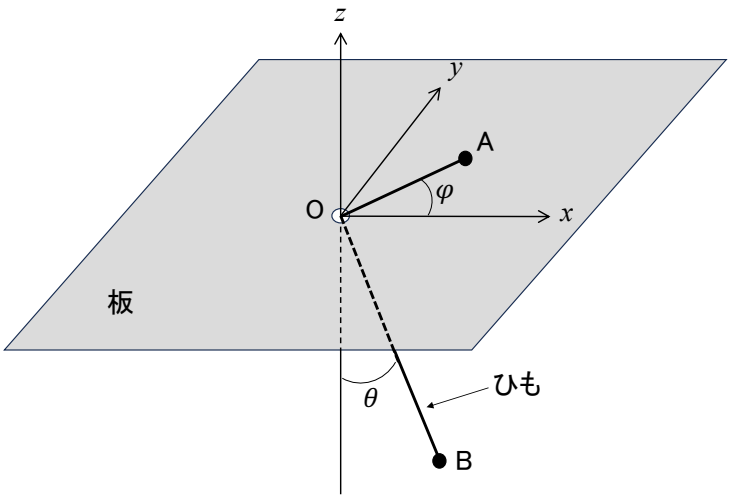

図 1

問題 2

3 次元空間における座標 $(0, 0, \frac{d}{2})$ に q の正電荷，座標 $(0, 0, -\frac{d}{2})$ に $-q$ の負電荷がある．2 つの電荷は電気双極子を構成している．電気双極子モーメント $\vec{p}$ は，$p \equiv |\vec{p}| = |qd|$ の大きさを持つ負の電荷から正の電荷へ向かうベクトル量として定義される．また，電気双極子モーメントの位置は電気双極子を構成する 2 つの電荷の中点の位置で定義される．

原点に置かれたこの電気双極子の作る電位および電場を，原点から十分に離れた位置において観測する．観測点の位置ベクトルは $\vec{r} = (x, y, z)$ であり，$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．また，真空の誘電率を ϵ_0 と書く．

[1] 位置 $\vec{r}$ における電位 $V(\vec{r})$ を x，y，z，d，q，ϵ_0 をもちいて表せ．

[2] $d \ll r$ がなりたっているとき，原点にある電気双極子のモーメントの向きに関わらず電位 $V(\vec{r})$ は以下の式で表される．問 [1] において d/r の 2 次以上の項を無視すると以下の式と一致することを示せ．

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

[3] 問 [2] の式に基づいて電場 $\vec{E}(\vec{r})$ が以下のように表されることを示せ．

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \tag{1}$$

上述の原点におかれた電気双極子に加えて位置 $\vec{r}$ に別の電気双極子 P_1 が置かれたとする．P_1 の電気双極子モーメントは $\vec{p}_1$ である．また，それぞれの電気双極子を構成する電荷間の距離は r より十分に小さいとし，原点におかれた任意の電気双極子による電場は式 (1) で記述できるものとする．

[4] 2 つの電気双極子間の相互作用エネルギー $U(\vec{r})$ は，P_1 が置かれたことによる静電エネルギーの変化量である．$U(\vec{r})$ は以下のように表されることを示せ．

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}_1}{r^3} \right]$$

[5] 原点にある電気双極子が問 [1] と同じく z 軸の正の方向を向いているとき，電気双極子 P_1 の位置 $\vec{r}$ が(a) z 軸上にある場合，(b) xy 平面内にある場合 のそれぞれについて，問 [4] の $U(\vec{r})$ を用いて相互作用が最小となる $\vec{p}_1$ の向きを答えよ．

（次ページにつづく）

問題 2 のつづき

真空中に置かれた無極性分子間に働く相互作用を電気双極子のモデルで考える．無極性分子の電荷分布に，ある瞬間になんらかのゆらぎで偏りが生じたとき，もしくは電場によって偏りが生じたとき，これらの電荷分布の偏りは電気双極子として考えることができる．無極性分子にゆらぎで電気双極子が生じたとき，それが作る電場を感じて別の無極性分子に電気双極子が生じると考えられる．それらの電気双極子間にはたらく相互作用がファンデルワールス―ロンドンの相互作用である．以下では，この相互作用について考える．

[6] 無極性分子 A，B がそれぞれ原点と z 軸上の位置 $\vec{R}$ にあるとしよう．ある瞬間，分子 A の電荷分布がゆらぎ，z 軸方向の電気双極子モーメント $\vec{p}_{\mathrm{A}}$ が生じたとする．この電気双極子モーメント $\vec{p}_{\mathrm{A}}$ による電場 $\vec{E}_{\mathrm{A}}$ を感じて無極性分子 B の電荷分布が偏り，電気双極子モーメント $\vec{p}_{\mathrm{B}}$ が生じたとする．2 つの電気双極子間の相互作用エネルギー $U(\vec{R})$ が，$p_{\mathrm{A}}(\equiv |\vec{p}_{\mathrm{A}}|)$ と $R(\equiv |\vec{R}|)$ に関するどのような関数か求めよ．分子 B の分極率を α とし，$\vec{p}_{\mathrm{B}} = \alpha \vec{E}_{\mathrm{A}}$ と考えてよい．ただし，α は定数とする．また，2 つの分子の大きさに比べて R は十分に大きく，問 [2]〜問 [4] で用いた近似が使えるものとする．

[7] 問 [6] の分子 A が分子 B に及ぼす力を求めよ．

問題 3

2 次元xy平面における 1 粒子のシュレディンガー方程式を考える．粒子の質量はmとする．以下の問いに答えよ．

[1] 固有関数を$\psi(x,y)$，ポテンシャルを$V(x,y)$，$\psi(x,y)$に対する固有エネルギーをEとして，定常状態を考え，時間依存しないシュレディンガー方程式を書け．必要に応じてプランク定数hを2πで割った定数$\hbar$を用いて良い．

まず，ポテンシャル$V(x,y)=0$ である自由粒子を考える．

[2] 固有関数$\psi(x,y)$が周期的境界条件

$$\psi(x,y)=\psi(x+L,y)=\psi(x,y+L)$$

を満たす場合を考える．Lは正の実数である．第 1 励起状態について，縮退度と，すべての規格化された固有関数を求めよ．

次に，ポテンシャル$V(x,y)$が

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & 0\le x\le L \text{ かつ } 0\le y\le L\\ \infty & \text{それ以外の場合}\end{cases} \qquad (1)$$

で定義され，1 辺の長さLの正方形の領域に粒子が閉じ込められた場合を考える．

[3] 固有関数$\psi(x,y)$が満たすべき境界条件を書け．

[4] 基底状態および，第 1 励起状態の規格化された固有関数をすべて求めよ．

式(1)のポテンシャルに，さらに，時間によらない摂動，

$$V'(x,y)=\begin{cases}\alpha xy & 0\le x\le L \text{ かつ } 0\le y\le L\\ 0 & \text{それ以外の場合}\end{cases}$$

が加えられた場合を考える． なお，αは正の実数とする．

[5] 摂動法を用いて，基底状態の 1 次の摂動エネルギーを求めよ．

[6] 摂動法を用いて，第 1 励起状態の 1 次の摂動エネルギーを求めよ．