物性物理科学II

注意：問題1から3までの各問に解答し，各問題の答えを別々の答案用紙に記入すること．1つの問題の解答が答案用紙2枚にわたるときは，2枚目にも問題の番号を書き，2枚目であることを明示すること．

問題1

図1に模式的に示す長さaの棒状分子がn個$(n \gg 1)$折り重なるように連なった一次元高分子鎖を考える．各分子は，隣接した分子の向きの如何にかかわらず，それぞれ右向きと左向きの2つの状態を自由に取ることができる．高分子鎖の両端の距離をXとして，以下の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数をk_B，系の温度をT，内部エネルギーをUとする．問[3]～[6]については，導出過程も記すこと．

[1]　右向きの分子の数をn_R，左向きの分子の数をn_L $(< n_R)$としたとき，それぞれをn, a, Xで表わせ．

[2]　巨視的状態を高分子鎖の両端の距離がXとなる状態として，その状態に対応した微視的状態の数$\Omega(X)$をn, a, Xで表わせ．

[3]　この高分子鎖のエントロピーSを，Xの関数として求めよ．なお，Stirlingの公式$\log x! \approx x\log x - x$を使っても良い．

[4]　高分子鎖の張力をfとすると，長さをdXだけ増加させるためには外からfdXの仕事をする必要があるので，$dU = TdS + fdX$が成り立つ．各分子が右向きと左向きの状態を自由に取ることができることに注意して，張力fが

$$f = -T\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T$$

であることを示せ．

[5]　張力fをXおよびTの関数として求めよ．また，その結果から，X一定の条件で温度が上昇すると張力はどうなるか答えよ．

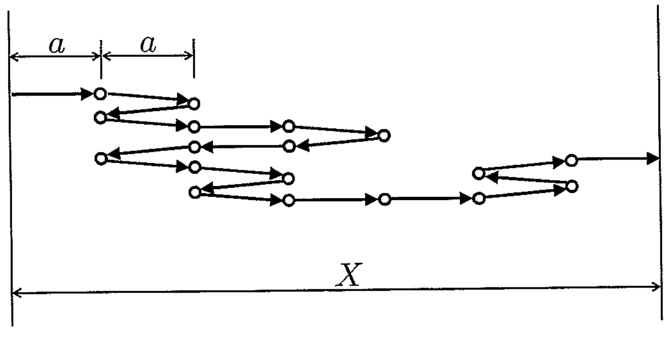

図1

（次ページにつづく）

問題１のつづき

[6]　$X \ll na$ の場合を考える．張力 f を X について１次まで展開し，その比例係数を求めよ．なお，$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ を使っても良い．

[7]　この高分子鎖を断熱的に引き伸ばすと温度はどうなるか，根拠を示した上で，答えよ．なお，マックスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_X = -\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T$，およびマックスウェルの規則 $\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_S \left(\frac{\partial X}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X = -1$ を使ってもよい．

[8]　熱力学第二法則によれば，孤立した系の自然な変化は，エントロピーが増大する方向に起きる．このことを踏まえ，上で考えた張力 f の起源を説明せよ．

問題２

真空中を伝播する平面波の光について考える．その電場$\vec{E}$は

$$\vec{E} = \mathrm{Re}[\vec{E_0}\exp \mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$$

と書かれる．ここで，$\mathrm{Re}[\eta]$は複素数 η の実部を表す．また，$\vec{E_0}$は複素定ベクトル，$\vec{k}$は波数ベクトル，$\vec{r}$は位置ベクトル，ωは角振動数，tは時間である．$\mathrm{i}^2 = -1$ である．以下の問いに答えよ．導出の過程も記すこと．

[1] Maxwell 方程式を用いて，電場が進行方向と直交することを示せ．

問[1]の結果から，$\vec{E_0}$は進行方向の成分を持たない．そこで，$\vec{E_0}$を 2 次元の複素ベクトルで表したものを Jones ベクトルと呼ぶ．ここで，右手系をなす x 軸，y 軸，z 軸をとり，光は z 軸方向に伝播するとすると，特定の偏光状態をもつ光の場合，以下のように書ける．

$$\vec{E_0} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \qquad (1)$$

ここで，x および y 軸方向の単位ベクトルはそれぞれ，$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$であり，$\alpha$，$\beta$ は複素数である．

[2] 式(1)で $\alpha = R$，$\beta = R\,\mathrm{i}$（R は実数）のとき，電場$\vec{E}$の各成分を実関数を用いて書け．さらに，z=0 において，時間の経過とともに$\vec{E}$の終点が xy 面内で描く軌道を図示せよ．その際，$\vec{E}$の終点が進む方向も記せ．

偏光について考察する場合，式(1)のベクトルのみを考えればよい．例えば，$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$はそれぞれ，$x$，$y$ 軸方向の直線偏光を表す規格化された Jones ベクトルである．また，$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}$は円偏光を表す．偏光を操作する素子は偏光素子と呼ばれ，その作用は Jones ベクトルに行列をかけることで表される．例えば，x 軸方向の直線偏光は透過し，y 軸方向の直線偏光は透過しない，すなわち透過軸が x 軸方向の偏光子を表す行列は$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$となる．

[3] 透過軸が x 軸と角度θをなす偏光子，すなわち Jones ベクトルが$\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{bmatrix}$である偏光を透過しない偏光子を表す行列を求めよ．

[4] 強度が 1 で x 軸方向の直線偏光を，透過軸が x 軸と45° をなす偏光子に通した後，透過軸が y 軸方向の偏光子に入射した．最後の偏光子を透過した後の強度を求めよ．また，偏光子を通す順序を逆にした場合の強度も求めよ．

（次ページにつづく）

問題２のつづき

[5] 透過軸が x 軸と角度 θ をなす偏光子を表す行列を P とすると，$P^2=P$ となることを示せ．さらに，この偏光子を表す行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

[6] 偏光素子は偏光子の他にもある．以下の行列で表される偏光素子の機能を考察する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

これら 3 つの偏光素子にそれぞれ，x 軸と $45°$ をなす直線偏光を入射した場合，どのような偏光に変換されるか，それぞれ答えよ．

[7] 問[6]の偏光素子のようなユニタリー行列で表される偏光素子と偏光子の違いを，エネルギーの透過率に着目して述べよ．

問題 3

金属の電子状態について考察する．ここで考察する金属は，自由電子近似が適用でき，指定のない場合は巨視的なサイズをもつものとする．プランク定数 hを 2πで割った定数を $\hbar$，電気素量を e，ボルツマン定数を k_{B}，電子の質量を mとして，次の問いに答えよ．ただし，電子はスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミ粒子であることに留意せよ．

[1] 体積 V（一辺の長さ L の立方体）の金属結晶中で 3 次元空間を占める粒子数 Nの自由電子系について，次の問いの $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ に当てはまる最も適切なものを，表 1 より各々選んで答えよ．

(a) フェルミ波数 k_{F}は $\boxed{ア}$ と表される．

(b) フェルミエネルギー E_{F}は $\boxed{イ}$ と表される．

(c) 面心立方構造を有する，ある単元素金属を考える．その面心立方格子の格子定数をaとし，自由電子近似が適用でき，金属原子 1 個あたり 1 個の伝導電子を出すとすると，そのフェルミエネルギー E_{F}は $\boxed{ウ}$ と表される．

表 1

$\left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$	$\left(\frac{\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$	$\left(\frac{\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$	$\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$	$\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$
$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi^2 N}{V}\right)^{4/3}$	$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{4/3}$
$\frac{\hbar^2}{2ma^2}(3\pi^2)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2ma}(6\pi^2)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2ma^2}(12\pi^2)^{2/3}$	$\frac{\hbar^2}{2ma^2}(3\pi^2)^{4/3}$	$\frac{\hbar^2}{2ma^2}(6\pi^2)^{4/3}$

[2] 問 [1]の 3 次元空間を占める自由電子を有する金属において，状態密度$D(E)$を電子のエネルギー Eの関数として表せ．また，$D(E)$をEの関数として，図 2 に例示する座標軸を用いて，その概形を図示せよ．また，このような金属において，低温では，その電子比熱が温度Tに比例することを定性的に説明せよ．

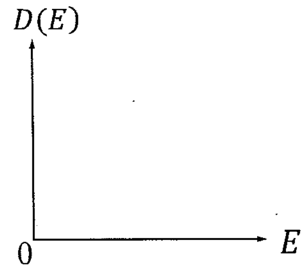

図 2

（次ページにつづく）

問題３のつづき

[3]　次に厚さを無視できる場合として，２次元金属を考える．その状態密度$D(E)$を，Eの関数として表せ．

[4]　問 [3]の２次元金属に有限の厚さを持たせた金属超薄膜を考えよう．薄膜面内（x-y平面）の長さはそれぞれ L_x，L_yで非常に大きく，z軸方向に厚み L_zを有するものとし，$L_x = L_y = L$，$L_z \ll L$とする．

(a) 電子はx-y平面内では自由に運動が可能であり，z軸方向には $0 \leq z \leq L_z$では自由に移動可能であるが，$z < 0$，$z > L_z$の領域には侵入できない． L_zが非常に小さければ，電子の運動は図３に示す様に３次元波数空間において，z軸方向の波数 k_zは連続的であると近似できず，量子化の効果が顕著になる．k_zの量子数を n_zとして，k_zとz軸方向の運動のエネルギー E_zを，それぞれ L_zとn_zを用いて表せ．

(b) 金属超薄膜中の電子のエネルギー Eは，k_x-k_y平面内の運動のエネルギーとE_zの和で与えられる．電子が $n_z = 1$ の準位を占めるときの状態密度$D(E)$を示せ．また $n_z = 1$ と $n_z = 2$ の準位まで占めるときの状態密度 $D(E)$を表せ．

(c) 金属超薄膜の状態密度 $D(E)$をエネルギーEの関数として，図２に例示する座標軸を用いて，その概形を図示せよ．

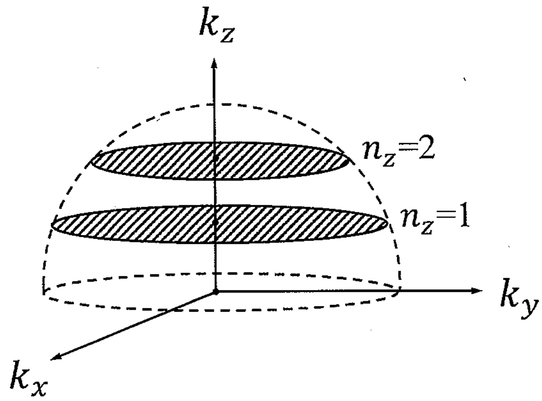

図３　z軸方向が量子化された金属超薄膜の３次元波数空間図．（$n_z = 2$ の準位まで電子が占有している様子（斜線部分）を示す.）

(d) 上記の設問で考えた金属超薄膜において，$k_x = k_y = 0$ としたときの，準位 $n_z = 1$ と $n_z = 2$ のエネルギー差 ΔE_zを L_zを用いて表せ．
またΔE_zが室温（300K）のエネルギーより大きくなる L_zを有効数字２桁で求めよ．
必要であれば以下の数値を使っても良い．
$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $\hbar = 1.1 \times 10^{-34}$ J·s, $k_{\mathrm{B}} = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

（次ページにつづく）

問題 3 のつづき

(e) 熱電材料の性能を示すゼーベック係数は，フェルミエネルギー E_{F}における状態密度$D(E)$のエネルギー微分 $\left.\frac{\partial D(E)}{\partial E}\right|_{E=E_{\mathrm{F}}}$ に比例すると近似できる．問 4(d)の条件を満たす金属超薄膜において，ゼーベック係数を増加させる方策を 200 字以内で論ぜよ．