2024年度大阪大学大学院基礎工学研究科博士前期課程（一般）入学試験

物性物理科学Ｉ

注意：問題１から３までの各問に解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．１つの問題の解答が解答用紙２枚にわたるときは，２枚目にも問題の番号を書き，２枚目であることを明示すること．

問題１

$x>0$ をみたす x 軸方向にのみ運動できる質量 m の質点のポテンシャルエネルギー $U(x)$ が

$$U(x) = -\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

で与えられている．但し，A, B は正の定数である．以下の問いに答えよ．

[1] $U(x)$ が極小となる位置 x_0 を，A, B を用いて表せ．

[2] $U(x_0)$ を，A, B を用いて表せ．

[3] $U(x)$ について，横軸に x をとったグラフの概形を書け．ここで $x \to +0$ および $x \to \infty$ での $U(x)$ の振る舞い，および $U(x)=0$ となる位置と x_0 の関係について明示すること．

[4] $U(x)$ を x_0 のまわりで２次の項まで展開した式を，A, B, x, x_0 を用いて表せ．

[5] $U(x)$ が問 [4] で求めた式で近似できる x の範囲内でのみ質点が運動するときのラグランジアンと運動方程式，および質点の運動における角振動数を求めよ．

[6] 問 [5] まで定数として扱った A, B の定数値を，$A>0, B>0$ を満たす範囲で変更できる状況にあり，変更後の A, B は変更前と同様に定数であると仮定する．変更後の質点の運動における角振動数が変更前の角振動数より大きくなるには A, B をどう変えればよいか，あるいはどう変えても角振動数は大きくならないか，下記の選択肢のなかから適切なもののみを全て選べ．但し質点の質量 m は変更前後で等しいとする．

ア）B を変えずに，A を大きくすればよい
イ）B を変えずに，A を小さくすればよい
ウ）A を変えずに，B を大きくすればよい
エ）A を変えずに，B を小さくすればよい
オ）A, B をどう変えても角振動数は大きくならない

問題２

図１の斜視図，図２の平面図の様に，空気中に置かれた長さ l，半径 a の中空の導体円筒Ｉと，同じ中心軸を持つ半径 $b>a$，長さlの中空の導体円筒IIを考える．l は a,b よりも十分長く，導体円筒I, IIの厚さやインダクタンスの寄与は無視できる．中心軸を z 軸とし，中心軸からの距離を r とする．真空の誘電率を ϵ_0，空気の比誘電率を１として，以下の問いに答えよ．

[1] 導体円筒Ｉと導体円筒IIにそれぞれ$+Q_0$，$-Q_0$の電荷を均一に帯電させた．この時に電荷で生じた電場の大きさ $E(r)$ を(1) $r<a$, (2) $a<r<b$, (3) $b<r$ の場合に分けて求めよ．

[2] 問[1]を用いて２つの導体円筒間の電気容量 C_0 を求めよ．

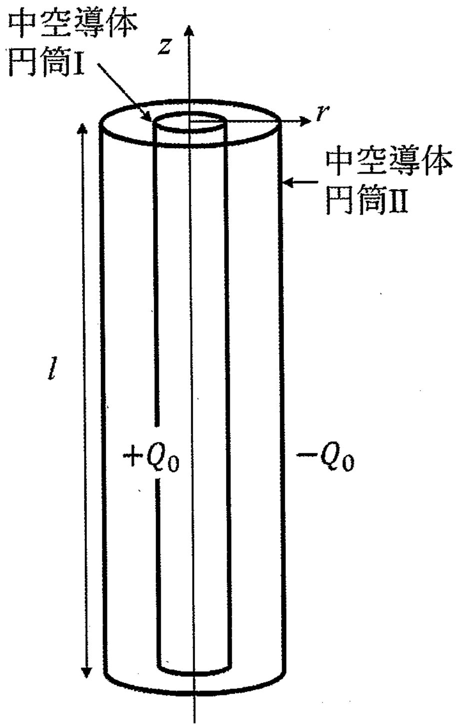

図１

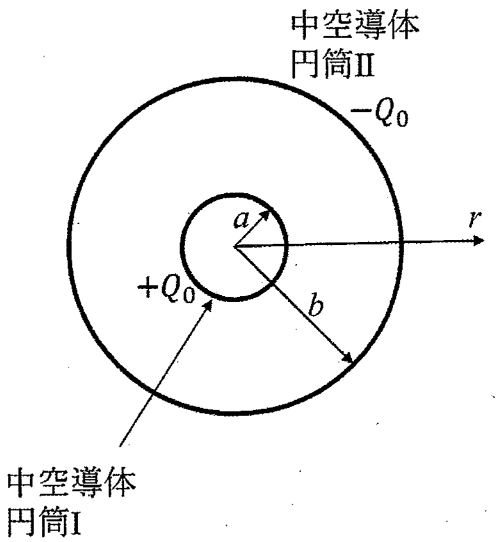

図２

（次ページにつづく）

問題２のつづき

[3] 次に電荷を帯電させたまま導体円筒 I, II の底から高さdまで誘電率 ϵ（ただし$\epsilon > \epsilon_0$）で絶縁性の高い液体Aをゆっくり満たした．なお d および $l-d$ は a, b に対して十分長いとする．このとき図３に示す２つの導体円筒間の電気容量は，液体が満たされた部分の電気容量 C_1 と満たされていない部分の電気容量 C_2 の和となる．C_1 と C_2 を，$C_0, l, d, \epsilon, \epsilon_0$ のいずれかまたは全てを用いて示せ．

[4] 問[3]の２つの導体円筒 I, II の間の電位差 V' を $Q_0, C_0, l, d, \epsilon, \epsilon_0$ を用いて示せ．

[5] 問[3]の導体円筒 I と II の間に満たした液体 A に電解質を時間 $t=0$ で素早く均一に溶かし，液体 B とした．この時電気容量 C_1 および C_2 の変化は無視できるが，導体円筒間の液体 B 中で微小な電流が流れ始めた．液体 B の電気伝導度を σとして，導体円筒間の抵抗 R を a, b, d, σ を用いて示せ．

[6] 問[5]において，導体円筒 I に帯電した電荷の大きさ$Q(t)$は時間とともにゆっくり減少する．$t>0$での $Q(t)$ とR，C_1，C_2の満たす時間に関する微分方程式を示し，$Q(t)$ を$Q_0, a, b, l, d, \sigma, \epsilon, \epsilon_0, t$ のいずれかまたは全てを用いて示せ．

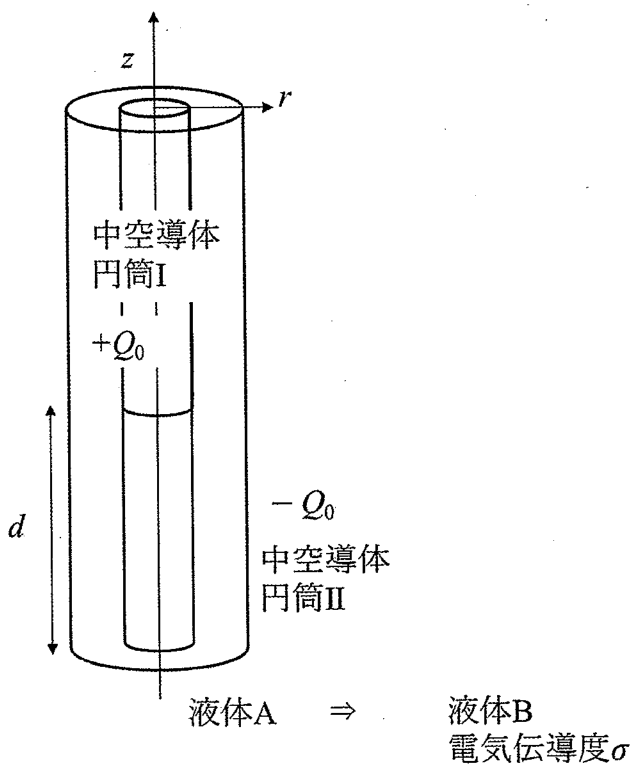

図３

問題３

系のハミルトニアンが

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で表される量子力学的な 1 次元調和振動子を考える．m は質量，ω は角振動数である．$\hat{x}$ と $\hat{p}$ はそれぞれ位置演算子，運動量演算子であり，交換関係 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ を満たす．ここで，$i^2 = -1$，$\hbar$ はプランク定数を2πで割った定数である．演算子 $\hat{x}$ の固有値 x に対応する固有ケットを $|x\rangle$，時間に依存しない任意のケットを $|\xi\rangle$ とすると，これらと運動量演算子の間には

$$\langle x|\hat{p}|\xi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\xi\rangle \tag{1}$$

の関係が成り立つことが知られている．

演算子 $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{2}$$

で定義する．これら演算子は交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ を満たす．$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有ケットおよびそれに対応する固有値はそれぞれ$|n\rangle$，n（n は 0 以上の整数）と書ける．$|n\rangle$ に対する$\hat{a}^\dagger$の作用は$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$であり，$\hat{a}$ の作用は $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ $(n \geq 1)$，$\hat{a}|0\rangle = 0$である．

以下の問いに答えよ．ただし，最終的な答えだけでなく，答えに至る考え方と過程も記すこと．

[1] $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて演算子 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を表せ．

[2] ハミルトニアン $\hat{H}$ と $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の交換関係，すなわち $[\hat{H},\hat{a}^\dagger\hat{a}]$ を求めよ．

（次ページにつづく）

問題３のつづき

[3] $\langle x|\hat{a}|0\rangle = 0$ の式に $\hat{a}$ の定義式(2)を代入し，式(1)において $|\xi\rangle = |0\rangle$ とした関係式を用いると $\langle x|0\rangle$ に関する次の微分方程式を得る:

$$x\langle x|0\rangle + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle = 0$$

この微分方程式と規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\langle x|0\rangle|^2\, dx = 1$ を用いて，基底状態 $|0\rangle$ の x 表示の波動関数 $\langle x|0\rangle$ を x の関数として求めよ．必要ならば，積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ．

[4] 演算子 $\hat{p}$ の固有値 p に対応する固有ケットを $|p\rangle$ とする．式(1)において $|\xi\rangle = |p\rangle$ とした関係式を利用して $\langle x|p\rangle$ を求めよ．必要ならば，$\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$，$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| dx = \hat{I}$, $\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$ を用いよ．ただし，$\hat{I}$ は恒等演算子である．(kは実数)

[5] 問[3]と[4]の結果を使うと，基底状態 $|0\rangle$ の p 表示の波動関数 $\langle p|0\rangle$ が，p の関数として

$$\langle p|0\rangle \propto \exp\left(-\frac{p^2}{\sigma^2}\right)$$

と表せる．σ を求めよ．必要ならば，積分公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\gamma)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ (γは実数) を用いよ．

[6] 第１励起状態 $|1\rangle$ の x 表示の波動関数 $\langle x|1\rangle$ $\left(= \langle x|\hat{a}^{\dagger}|0\rangle\right)$ を，$\langle x|0\rangle$ および $\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle$ を用いて表せ．