

物性物理学 I

注意：問題 1 から 4 までの各問に解答し，各問題の答えを別々の答案用紙に記入すること．1 つの問題の解答が答案用紙 2 枚にわたるときは，2 枚目にも問題の番号を書き，2 枚目であることを明示すること．

問題 1

図 1 のように，滑らかで水平な床の上に質量 m_1 の質点が座標 x_1 に，質量 m_2 の質点が座標 x_2 ($> x_1$) にあり，両者はバネ定数 k (自然長 l) で質量の無視できるバネでつながれている．これらの質点とバネは x 軸方向にのみ水平運動すると仮定する．以下の問いに答えよ．

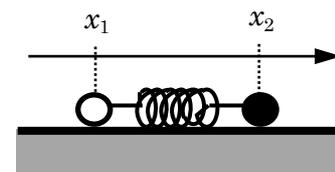


図 1

[1] この系のラグランジアンを $m_1, x_1, m_2, x_2, k, l, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ で表せ．ここで， \dot{x}_1, \dot{x}_2 はそれぞれ x_1, x_2 の時間微分である．

[2] この系のラグランジアンを， $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ の代わりに重心座標 $X = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2)$ ，相対座標 $x = x_2 - x_1$ とそれらの時間微分 \dot{X}, \dot{x} を用いて表せ．

[3] 問[2]の重心座標および相対座標についての運動方程式を書け．

[4] 問[2]の相対運動における角振動数を求めよ．

次に，前問までで扱ったバネと質点が，図 2 のように鉛直方向に向いて，この鉛直方向にのみ運動するときのことを考える．ここで，質量 m_1 の質点の座標を y_1 ，質量 m_2 の質点の座標を y_2 ($> y_1$)，重力加速度は一定で下向きにかかりその大きさを g とする．

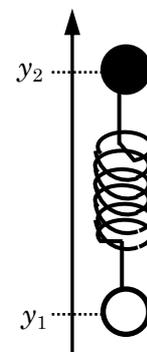


図 2

[5] この系の相対座標 $y = y_2 - y_1$ についての運動方程式を導いて相対運動における角振動数を求め，問[4]で得た角振動数とどう異なるか，または同じであるか，理由と共に記述せよ．

[6] クーロン力によって陽子に束縛された水素原子中の電子のエネルギー準位が，無重力下にあるときと一定の重力加速度 g のかかった地表上にあるときで変化するかしないか理由と共に記述せよ．但し，相対論効果を無視する．

問題 2

図 3 のように、真空中に置かれた半径 a の中空円筒導体 X と半径 b ($a < b$) の中空円筒導体 Y とで構成される同軸ケーブルを考える。円筒の厚さは無視でき、ケーブルは十分長いとする。円筒の中心軸に平行に z 軸をとり、また中心軸から距離 r だけ離れたところに点 P をとる。この同軸ケーブルの単位長さあたりの静電容量と自己インダクタンスをそれぞれ C と L とする。真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 , μ_0 , また $i^2 = -1$ として、以下の問いに答えよ。

[1] 中空円筒導体 X と中空円筒導体 Y にそれぞれ単位長さあたり $+Q$, $-Q$ の電荷を均一に帯電させた。このときの点 P における電場の大きさ $E(r)$ を $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の場合ごとに求めよ。

[2] 問[1]を用いてこの同軸ケーブルの単位長さあたりの静電容量 C を ϵ_0, μ_0, a, b から必要なものを用いて求めよ。

[3] 次に中空円筒導体 X には z 軸に対して正の向きに、中空円筒導体 Y には負の向きにそれぞれ定常電流 I_0 を均一に流した。このときの点 P における磁場の大きさ $H(r)$ を $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ の場合ごとに求めよ。

[4] 図 3 の斜線で示すように、 z 軸方向に Δz の長さを持ち中空円筒導体 X と中空円筒導体 Y に挟まれた長方形の面を考える。問[3]の条件下でこの面を貫く磁束 Φ を求め、この同軸ケーブルの単位長さあたりの自己インダクタンス L を ϵ_0, μ_0, a, b から必要なものを用いて求めよ。

[5] この同軸ケーブルは図 4 に示す自己インダクタンス $L\Delta z$ の微小コイル、静電容量 $C\Delta z$ の微小コンデンサからなる回路とみなせる。電圧と電流をそれぞれ z と時間 t の関数 $V(z, t)$, $I(z, t)$ と定義すると、 $\Delta z \rightarrow 0$ の極限では以下の 2 つの式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}$$

[6] 問[5]より、同軸ケーブルを伝搬する電気信号は $V(z, t) = V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ と記述できることが分かる。ただし V_0 は定数で、 ω , k はそれぞれ電気信号の角周波数と波数である。この電気信号の位相速度の大きさ $v = \omega/|k|$ を L と C を用いて求めよ。

[7] 問[2], 問[4], 問[6]の結果から、位相速度の大きさを ϵ_0, μ_0, a, b のうち必要なものを用いて表せ。図 3 の同軸ケーブルの半径 a, b を変えたときに、 z 方向に伝搬する電気信号の位相速度がどのようなになるかを説明せよ。

問題 2 のつづき

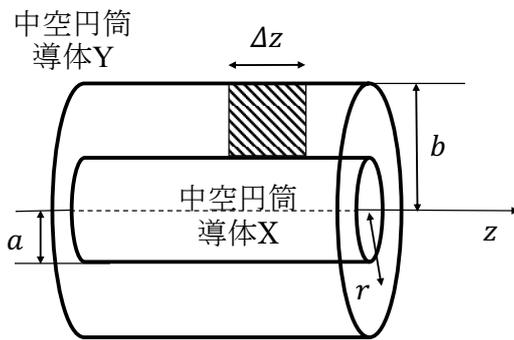


図 3

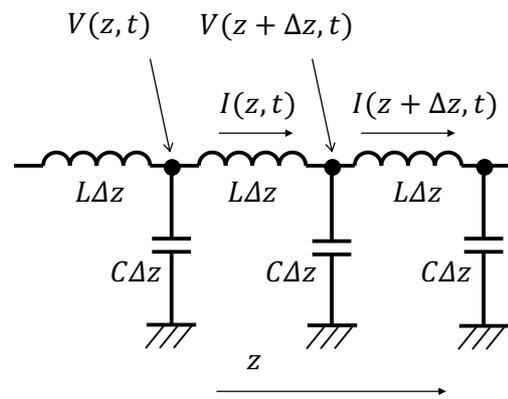


図 4

問題 3

2 準位系の時間に依らないハミルトニアン \mathcal{H} の固有値が E_0 および E_1 ($E_0 \neq E_1$) である場合を考える。恒等演算子を 1 およびパウリ演算子を $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とするとハミルトニアンは $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(H_0 1 + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ と表される。ここで、 $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ および $\mathbf{H} \equiv (H_1, H_2, H_3)$ である。また、 H_0, H_1, H_2, H_3 は実数であり、 $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = H_1 \sigma_1 + H_2 \sigma_2 + H_3 \sigma_3$ である。以下において、 \hbar はプランク定数を 2π で割った定数であり、 $i^2 = -1$ である。恒等演算子やパウリ演算子は正規直交基底をなす $|0\rangle$ および $|1\rangle$ を用いて、以下のように書ける。

$$1 \equiv |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad \sigma_1 \equiv |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|, \quad \sigma_2 \equiv i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|, \quad \sigma_3 \equiv |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

[1] ハミルトニアン \mathcal{H} の固有値 E_0 と E_1 の差の 2 乗 $(E_0 - E_1)^2$ を計算し、 \mathbf{H} もしくは H_1, H_2, H_3 を用いて書け。

時刻 t における系の状態を $|\psi(t)\rangle$ とすると、系の状態を表す密度演算子 $\rho(t)$ は $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ と書ける。

[2] この密度演算子の運動方程式はシュレディンガー方程式 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle$ より、 $i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)]$ となることを示せ。

[3] 密度演算子 $\rho(t)$ も \mathcal{H} と同じように、パウリ演算子を使って、 $\rho(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma})$ と書ける。ここで、 $\mathbf{P}(t) \equiv (P_1, P_2, P_3)$ は実ベクトルであり、 $\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\sigma} = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + P_3 \sigma_3$ である。いま、 $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ であるため、 $\rho^2(t) = \rho(t)$ が成立する。このとき、 $\mathbf{P}(t)$ が満たすべき条件を求めよ。

[4] $t = 0$ のとき、この 2 準位系の状態が $\rho(0) = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$ であるとする。 $t > 0$ のとき、 $\rho(t)$ が時間に依存しないためにハミルトニアンの H_1, H_2, H_3 が満たすべき条件を書け。ただし、 $|\mathbf{H}| \neq 0$ とする。

[5] $i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)] = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 H_j P_k [\sigma_j, \sigma_k]$ となることを考慮して、 $\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar} (\mathbf{H} \times \mathbf{P}(t))$ を示せ。これはブロッホ方程式と呼ばれる。また、 \mathbf{H} が $\mathbf{P}(t)$ と平行でないとき、 $\mathbf{P}(t)$ の時間変化を定性的に説明せよ。模式図で示しても良い。

問題 4

熱平衡状態にある N 個の独立したスピン (大きさ 1) からなる系がある. j 番目のスピンを記述するスピン変数 σ_j は, $\sigma_j = -1, 0, 1$ の 3 つの値をとる. この系が, 磁束密度 B の磁場中にある場合を考える. このとき, 系のエネルギーは

$$E = \sum_{j=1}^N (-\mu B \sigma_j)$$

で与えられる. ここで μ は正の定数である. ボルツマン定数を k_B , 系の温度を T として以下の問いに答えよ.

- [1] この系のスピン 1 つあたりの磁化 $m = (\mu/N) \sum_{j=1}^N \sigma_j$ の期待値を求めよ.
- [2] 高温・低磁場の極限 ($\mu|B| \ll k_B T$) での磁化 m の表式を求めよ.
- [3] 低温・高磁場の極限 ($\mu B \gg k_B T$) での磁化 m の表式を求めよ.
- [4] 磁化率 $\chi = \left. \frac{\partial m}{\partial B} \right|_{B \rightarrow 0}$ の表式を求めよ.
- [5] この系の分配関数およびエントロピー S を求めよ.
- [6] 問 [5] で求めたエントロピーの温度依存性として最も適当なものを図 5 の (A)~(F) から選べ. ただし, 図 5 の S_∞ は高温極限でのエントロピーである.
- [7] 問 [5] のエントロピーの温度依存性を, $\mu|B| < k_B T$ と $\mu B > k_B T$ の場合に分けて, スピンの状態の温度変化と対応づけて説明せよ. ただし, 高温極限でのエントロピー S_∞ の具体的な値を用いること.

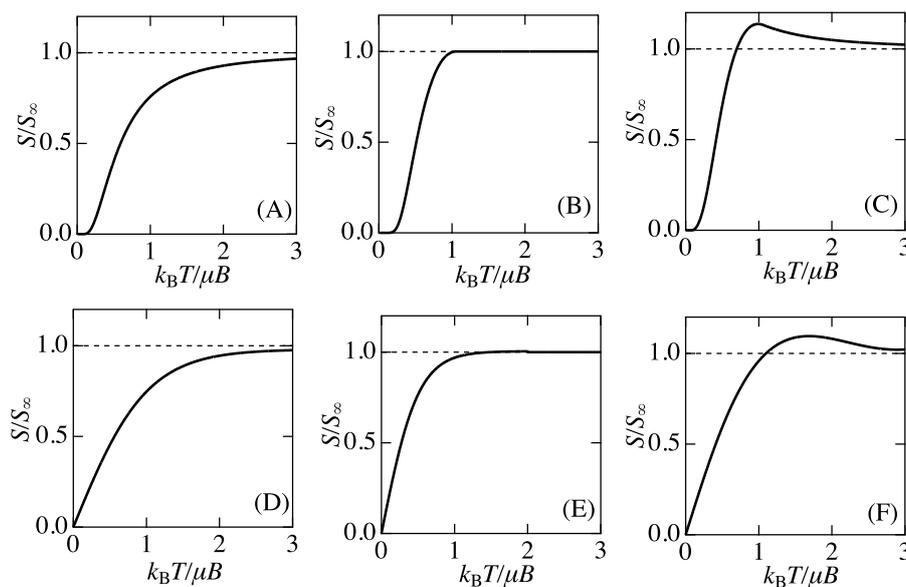


図5