

## 物性物理学 II

注意：問題 1 から 3 までの各問に解答し、各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること。1 つの問題の解答が解答用紙 2 枚にわたるときは、2 枚目にも問題の番号を書き、2 枚目であることを明示すること。

## 問題 1

[1] 常磁性体の磁気的振る舞いについて考える。\$g\$ をランデの \$g\$ 因子、\$\mu\_0\$ を真空の透磁率、\$\mu\_B\$ をボーア磁子、\$k\_B\$ をボルツマン定数、\$T\$ を温度とする。外部磁場 \$H\_z\$ のもと、この外部磁場に平行な、孤立磁性イオンの磁気モーメントの大きさを \$-g\mu\_B M\_J\$、\$M\_J = J, J-1, J-2, \dots, -J\$ とする。\$J\$ は正の整数または半整数とする。このとき、磁気モーメントどうしは孤立しているものとし、磁気モーメントの熱力学的平均値 \$\langle m\_z \rangle\$ を以下の式で表す。

$$\langle m_z \rangle = \frac{\sum_{M_J=-J}^J (-g\mu_B M_J) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{M_J}}{k_B T}\right)}{\sum_{M_J=-J}^J \exp\left(-\frac{\varepsilon_{M_J}}{k_B T}\right)} \quad (1)$$

ただし \$\varepsilon\_{M\_J}\$ は、外部磁場 \$H\_z\$ のもとに存在する磁気モーメント \$-g\mu\_B M\_J\$ のゼーマンエネルギーである。以下の問いに答えよ。

(a) 式(1)における \$\varepsilon\_{M\_J}\$ を \$g\$、\$\mu\_0\$、\$\mu\_B\$、\$M\_J\$、\$H\_z\$ を用いて示せ。

(b) \$J = \frac{1}{2}\$、\$g = 2\$ の場合の \$\langle m\_z \rangle\$ を \$\mu\_0\$、\$\mu\_B\$、\$H\_z\$、\$k\_B\$、\$T\$ を用いて示せ。ただし総和記号 \$\Sigma\$ を用いずに示せ。

(c) ここで \$\left|\frac{\varepsilon\_{M\_J}}{k\_B T}\right| \ll 1\$ の場合を考える。\$|x| \ll 1\$ の場合 \$\exp(-x) \sim 1 - x\$ と近似できること、ならびに \$\sum\_{M\_J=-J}^J M\_J^2 = J(J+1)(2J+1)/3\$ の関係式を用いて、(a)の結果と(1)式とを变形することにより \$\langle m\_z \rangle\$ を \$g\$、\$\mu\_0\$、\$\mu\_B\$、\$J\$、\$H\_z\$、\$k\_B\$、\$T\$ を用いて示せ。ただし総和記号 \$\Sigma\$ を用いずに示せ。

(d) (c)の結果を用いキュリー則で表される常磁性帯磁率 \$\chi\$ が導かれることを示し、キュリー定数 \$C\$ を求めよ。ただし常磁性体を構成する単位体積当たりの磁気モーメントの数を \$N\$ とせよ。

[2] 局在スピンからなる強磁性体、反強磁性体が示す帯磁率 \$\chi\$ の典型的な温度依存性についてグラフの概形をそれぞれ示し、その特徴について説明せよ。さらに、帯磁率の逆数 \$1/\chi\$ についても強磁性体、反強磁性体の温度依存性についてのグラフの概形をそれぞれ示し、その特徴について説明せよ。その際、\$\chi\$ および \$1/\chi\$ のグラフ中に原点 \$O\$、キュリー温度 \$T\_C\$、ネール温度 \$T\_N\$ を示すこと。ただし、キュリー温度 \$T\_C\$ またはネール温度 \$T\_N\$ 以下の温度領域における \$\chi\$ または \$1/\chi\$ は示さなくて良い。

問題 2

電子密度が  $n$ 、かつ、正孔密度が  $p$  の半導体について考える。この半導体では、電子密度  $n$  と正孔密度  $p$  は次式で与えられる。

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{k_B T}\right), \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{k_B T}\right).$$

ここで、 $T$  は温度、 $k_B$  はボルツマン定数、 $E_c$  は伝導帯の底のエネルギー、 $E_v$  は価電子帯の頂上のエネルギー、 $E_F$  はフェルミエネルギーである。 $N_c$  と  $N_v$  はそれぞれ伝導帯と価電子帯の有効状態密度であり、

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad N_v = 2 \left( \frac{2\pi m_h k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

と表される。ここで、 $h$  はプランク定数、 $m_e$  と  $m_h$  はそれぞれ電子と正孔の有効質量 ( $> 0$ ) である。以下では、バンドギャップを  $E_g$  とし  $E_c = E_g$ 、 $E_v = 0$  であるとする。また、素電荷を  $e$  と定義する。

まず、真性半導体についての以下の問いに答えよ。

- [1] この真性半導体のフェルミエネルギー  $E_{Fi}$  を  $E_g$ 、 $T$ 、 $k_B$ 、 $m_e$ 、 $m_h$  を用いて表せ。
- [2] 真性キャリア密度  $n_i$  を、 $N_c$ 、 $N_v$ 、 $E_g$ 、 $k_B$ 、 $T$  を用いて表せ。
- [3] 図 1 の●は真性キャリア密度  $n_i$  と温度  $T$  の関係を示したものである。この真性半導体のバンドギャップ  $E_g$  を有効数字 2 桁で求め、eV の単位で解答せよ。ただし、計算を簡単にするため、 $k_B \approx 1.0 \times 10^{-4} \text{ eV K}^{-1}$  とし、 $N_c$  と  $N_v$  の  $T$  依存性が  $n_i$  の  $T$  依存性にもたらす寄与は無視できるほど小さいとしてよい。また、図 1 の  $n_i$  の単位は  $\text{m}^{-3}$  であり、縦軸は  $n_i$  の自然対数 ( $\ln n_i$ ) である。

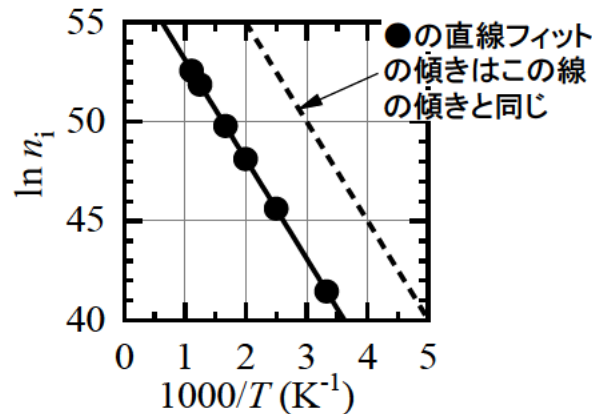


図 1

(次ページにつづく)

## 問題 2 のつづき

次に上述の半導体に不純物をドーピングした半導体の pn 接合を考える。ドナー密度  $N_D$  の n 型半導体と、アクセプタ密度  $N_A$  の p 型半導体を接合し、熱平衡状態に至ったところ、n 型層と p 型層の双方に空乏層ができ、拡散電位が  $V_D$  であった。ただし、両層においてドナー及びアクセプタ密度はそれぞれ空間的に一様で、ドナーとアクセプタは全て活性化しているとする。次の問いに答えよ。

- [4] この pn 接合の  $eV_D$  を  $E_g$ ,  $k_B$ ,  $T$ ,  $N_D$ ,  $N_A$ ,  $N_c$ ,  $N_v$  を用いて表せ。
- [5] この pn 接合の両端を短絡した状況（ゼロバイアス時）を考える。p 型層中の空乏層から離れたフラットバンド領域における少数キャリア（電子）密度  $n_{p0}$  を、n 型層中の空乏層から離れたフラットバンド領域における多数キャリア（電子）密度  $n_{n0}$ ,  $e$ ,  $V_D$ ,  $k_B$ ,  $T$  を用いて表せ。ここで、フラットバンド領域とは価電子帯の頂上や伝導帯の底のポテンシャルが場所に依らず一定である領域のことである。
- [6] この pn 接合に順バイアス  $V$  を印加した状況を考える。バイアスを加えると、pn 接合界面近傍において、電子密度の勾配が生じる。これにより、n 型層から p 型層へ電子の拡散が起こり、p 型層側の接合界面近傍での少数キャリア（電子）密度はバイアス印加前に比べ増加する。ただし、n 型層中の空乏層から離れたフラットバンド領域における多数キャリア（電子）密度  $n_{n0}$  は拡散により変化しないとする。また、設問[5]では、p 型層中の空乏層から離れたフラットバンド領域における少数キャリア（電子）密度を  $n_{p0}$  であるとしたが、空乏層からフラットバンドに移り変わる境界位置においても、バイアス印加前の少数キャリア（電子）濃度は  $n_{p0}$  であったとする。このとき、同位置（p 型層中の空乏層からフラットバンドに移り変わる境界位置）において、バイアス印加によって増加した定常状態における電子密度、つまり過剰少数キャリア（電子）密度  $\Delta n_p$  を  $n_{p0}$ ,  $e$ ,  $V$ ,  $k_B$ ,  $T$  を用いて表せ。

## 問題 3

温度・熱に関連する物理現象について、以下の設問[1]~[4]に答えよ。なお、ボルツマン定数を  $k_B$ 、プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割った定数を  $\hbar$  とする。

[1] 以下の文章を読んで、(1a)~(1j) の空欄の中に入るものとして、最も適切と思われる用語、式または数値を対応する選択肢から選んで、その記号 (ア) ~ (エ) を用いて答えよ。

物質は、温度  $T$  によって様々な振る舞いを見せる。高温極限では、物質を構成している基本粒子は (1a) 分布に従う。一方、物質の温度を下げると、構成粒子の熱エネルギー (1b) に比べて粒子間の引力相互作用が相対的に大きくなる。このような状況では、粒子は自由に動き回ることができなくなり、ある温度以下では気体から液体へと相転移するのが一般的である。例えば、(1c) 揺らぎによって生み出される (1d) が支配的に働く希ガスの場合、原子番号の小さいヘリウムガス ( $^4\text{He}$  または  $^3\text{He}$ ) の方がアルゴンガス ( $^{40}\text{Ar}$ ) よりも液化温度が低くなる。この結果を踏まえると、水素ガス ( $\text{H}_2$ ) の方がヘリウムガス ( $^4\text{He}$  または  $^3\text{He}$ ) よりも液化温度が低くなると考えられる。しかし、水素分子は (1e) として取り扱えるので、(1d) に加えて、電荷の空間的な偏りが生じやすくなる分、ヘリウム ( $^4\text{He}$  または  $^3\text{He}$ ) よりも粒子間の相互作用が強くなり、高い温度で液化する。それ故、最も液化温度の低い物質はヘリウム ( $^4\text{He}$  または  $^3\text{He}$ ) であり、これらの物質は (1f) 揺らぎによって大気圧では絶対零度まで固化しない「永久液体」としても知られている。

## 選択肢

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
(1a)	ボーズ	フェルミ	マクスウェル	ポアソン
(1b)	$\left(\frac{1}{k_B T}\right)^2$	$\frac{1}{k_B T}$	$k_B T$	$(k_B T)^2$
(1c)	スピン	熱	量子	電荷
(1d)	磁気力	コリオリ力	ファンデル ワールス力	クーロン力
(1e)	単原子分子	二原子分子	フェルミオン	ボゾン
(1f)	スピン	熱	量子	電荷

(次ページにつづく)

## 問題 3 のつづき

次に、物質の温度を測定する方法について考える。まず「白金測温抵抗温度計」の原理について考察する。 (lg) 散乱によって支配される白金などの典型金属の抵抗値は、ブロッホ-グリュナイゼンの式に従い、窒素の液化温度 (約 77 K) から室温を超える幅広い領域では、温度の (lh) 乗に比例するので、温度計として利用できる。しかし、極低温に近づくと抵抗値は、温度の (li) 乗に比例するようになり、絶対零度付近では (lj) 散乱の影響で一定値になる。そのため白金測温抵抗温度計は、 ${}^4\text{He}$  の液化温度 (約 4.2 K) で利用することができない。

## 選択肢

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
(lg)	電子-フォノン	電子-電子	不純物	磁気
(lh)	2分の1	1	3	5
(li)	2分の1	1	3	5
(lj)	電子-フォノン	電子-電子	不純物	磁気

さて、設問[1]の白金測温抵抗温度計以外にも物理現象を利用した温度計がいくつか存在する。その例として以下では「放射温度計」と「熱電対温度計」について考えていく。

[2] ここでは物体表面の熱放射スペクトルから温度  $T$  を測定する「放射温度計」の原理を考察する。簡単のために、電磁波を透過しない壁からなる一辺が  $L$  の立方体の箱の中に存在する電磁波が温度  $T$  で熱平衡にあるとき、箱の壁にかけられた小さい穴から漏れる電磁波の放射の強度と温度の関係を考える。箱の中に存在する電磁波は、固体中の弾性波と同じように、互いに独立な調和振動子、すなわち自由ボーズ粒子の集まりと見なせる。ただし、弾性波と違って縦波は存在しない。以下では、電磁波は光速  $c$ 、波数ベクトル  $\mathbf{q}$ 、固有角振動数  $\omega(\mathbf{q}) = c|\mathbf{q}|$  を持つ単色波であるとする。ただし、電磁波の偏光の自由度は考慮せよ。以下、(2a)、(2b) の問いに答えよ。なお、(2b) で求めた関係を用いて温度を測定するのが放射温度計である。

(2a) この電磁波を表す調和振動子の状態密度  $D(\omega)$  を求めよ。

(2b) この電磁波が自由ボーズ粒子の集まりであることを考慮して、温度  $T$  で熱平衡にある電磁波の全エネルギー  $u$  を求め、 $u$  が温度  $T$  にどのように依存するのか答えよ。このとき、零点エネルギーは無視せよ。もし必要があれば、以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (1)$$

(次ページにつづく)

## 問題3のつづき

[3] 次に金属の熱電能の差を利用した「熱電対温度計」の原理について考察する。この方法では、異なる2種の金属を接合して閉回路を作り、2つの接合点をそれぞれ  $T_c$ ,  $T_h$  ( $T_c < T_h$ ) の温度に保った際に、ゼーベック効果により両接点間に生じる起電力を測定することで温度を知ることができる。この効果を定量的に表すゼーベック係数  $S$  を、(3a), (3b)の設問にしたがって求めよう。

(3a) 温度差と電場が存在する場合の電子のフェルミ分布関数  $f$  は、それらが存在しない平衡状態の分布関数  $f_0$  からずれる。ここでは具体的に1次元空間の場合を考え、その座標を  $x$  で表す。温度勾配  $\frac{dT}{dx}$  と電場  $E_x$  が十分小さい場合には、分布関数  $f$  は

$$f(k_x) = f_0(k_x) + \tau \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon(k_x)} \right) v_x \left[ -eE_x + \frac{\varepsilon(k_x) - \mu}{T} \left( -\frac{dT}{dx} \right) \right] \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 $e$  は電気素量、 $k_x$  は波数、 $\tau$  は緩和時間、 $\varepsilon(k_x)$  はエネルギー、 $\mu$  は化学ポテンシャル、 $v_x = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{d\varepsilon(k_x)}{dk_x} \right)$  は群速度を表す。また電流密度  $J_x$  は

$$J_x = -e \sum_{k_x} v_x(k_x) f(k_x) \quad (3)$$

で与えられる。この  $J_x$  を以下で定義される  $K_n$  で表せ。なお、 $n$  は適当な整数である。

$$K_n = \int_{-\infty}^{\infty} L(\varepsilon) (\varepsilon - \mu)^n \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon \quad (4)$$

$$L(\varepsilon) = \sum_{k_x} \tau v_x^2(k_x) \delta(\varepsilon - \varepsilon(k_x)) \quad (5)$$

(3b) ゼーベック係数  $S$  は、電流が流れていない状態で

$$S = \frac{E_x}{\left( \frac{dT}{dx} \right)} \quad (6)$$

と定義される。このことを利用して、低温におけるゼーベック係数  $S$  を、 $L(\mu)$  およびそのエネルギー微分  $\left. \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu}$  を用いて表せ。その際、任意の関数  $H(\varepsilon)$  に関して十分低温では、以下のゾンマーフェルト展開の近似式が適用できるとしてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\varepsilon) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon \approx H(\mu) + \frac{\pi^2 (k_B T)^2}{6} \left. \frac{d^2 H}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\mu} \quad (7)$$

[4] 「放射温度計」と「熱電対温度計」のどちらが数十ケルビン以下の低温での温度測定に適しているのか、設問[2], [3]の答えを踏まえて、理由とともに答えよ。