物性物理科学Ⅰ

注意：問題１から４までの各問に解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．１つの問題の解答が解答用紙２枚にわたるときは，２枚目にも問題の番号を書き，２枚目であることを明示すること．

問題１

図１のように質量がない長さℓの糸の先に質量mの質点が固定されている．糸の他端は原点Ｏで固定されており，糸はたるまないものとする．重力は下向き（zが負の方向）に作用し，重力加速度の大きさをgとする．この質点の運動を解析しよう．

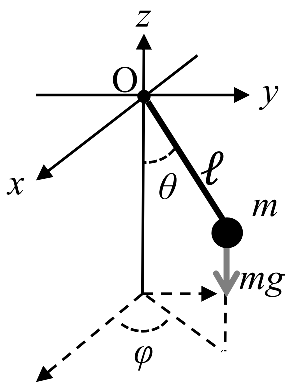

図１

[1] 図１のように設定した直交座標系（xyz座標系）でのラグランジアンを書き下せ.

[2] ラグランジュの未定係数法を用いて x, y, z それぞれの座標についての運動方程式を立てよ．ただし未定係数はλとし，未知数と方程式の数を一致させることに留意せよ.

[3] 質点の位置はr, θ, φを座標とする球座標系で指定することもできる．球座標系でラグランジアンを書き，オイラー・ラグランジュの運動方程式から，図中に示されるθ, φそれぞれについての運動方程式を求めよ.

[4] この系の循環座標を指摘し，保存量を具体的に示せ.

[5] θが一定値θ_1となって質点が運動するために与えるべきφ方向の初速度を求めよ.

[6] θが一定値θ_1となって質点が運動する条件で，設問[2]で求めた運動方程式に現れたλの具体的表式を求め，運動方程式中のλを含む項の物理的意味を述べよ．ただし，上記条件におけるφ方向の角速度をω_0とする．必要であれば解答にω_0を用いて良い.

[7] 設問[6]に記載した条件のときの質点のz座標を求め，ω_0を用いて書け.

[8] 設問[6]に記載した条件で運動している質点にθ方向の微小な撃力を加えた後の運動を調べよ．なお，$|\alpha| \ll 1$のとき$\sin\alpha \simeq \alpha$，$\cos\alpha \simeq 1$ の近似式が成り立つとして良い．また，必要であれば解答にω_0を用いて良い.

問題２

図２のような電気抵抗 R の抵抗と自己インダクタンス L のコイルからなる回路があり，スイッチ S を a 側に入れることで起電力 ϕ の電池とつなぐことも，b 側に切り替えて短絡させることもできる．

まず時刻 $t = 0$ のとき，スイッチ S を a 側に入れた．時刻 $t = 0$ で電流は流れていなかったとし，以下の問いに答えよ．

[1] t 秒後に回路を流れている電流を求めよ．

[2] t 秒経過するまでの間に電池のする仕事 W および抵抗に発生するジュール熱 J を求めよ．

[3] 設問[2]において求めた W と J の差（$W-J$）はエネルギー保存の観点から何を意味しているか答えよ．

[4] その後十分に時間が経過し，回路に定常電流 I_0 が流れるようになった．その値 I_0 を求めよ．

[5] この定常値 I_0 にできるだけ速く近づくようにするには R や L の値がどのようであったらよいか答えよ．

次に，スイッチ S を b 側に切り替えた．この時刻を新たに $t' = 0$ とする．設問[4]で求めた定常電流 I_0 が時刻 $t' = 0$ において回路に流れていたとして，以下の問いに答えよ．

[6] 時刻 t'（ただし $t' > 0$）において流れている電流を求めよ．

[7] 設問[6]のとき十分に時間が経過し，回路に流れていた定常電流が消えるまでの間に抵抗に発生するジュール熱 J' を求めよ．またこの J' に相当するエネルギーは，もともとどこにどのように蓄えられていたものか答えよ．

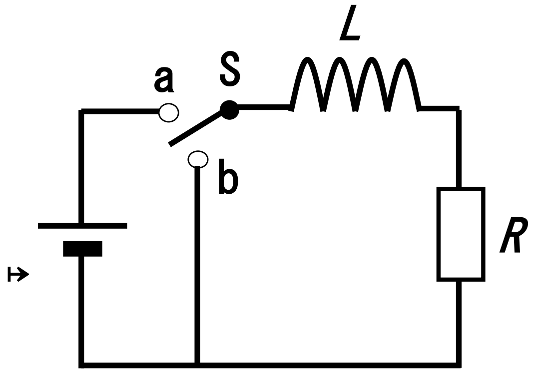

図２

問題３

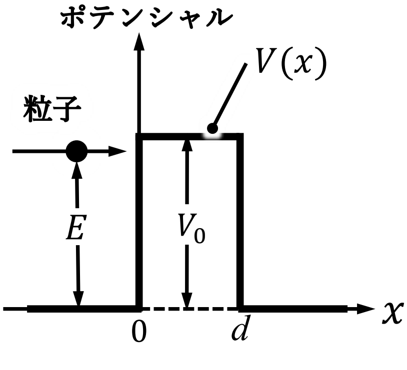

図３

図３に示すように，粒子の一次元の量子力学的運動を考える．質量mの粒子がエネルギーEをもって，ポテンシャル障壁に$x<0$の領域からxの正方向に入射する． d および V_0を正定数として，粒子が感じるポテンシャル $V(x)$は以下の通りとする．

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \quad --- \text{領域 I} \\ V_0 & (0 < x < d) \quad --- \text{領域 II} \\ 0 & (x \geq d) \quad --- \text{領域 III} \end{cases}$$

$\hbar$をプランク定数hを2πで割った定数として，以下の問いに答えよ．

[1] 領域 I，II，III において，波動関数を$\psi(x)$として時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け．

[2] $x=0$ および $x=d$において，設問[1]の$\psi(x)$が満たすべき条件を示せ．ただし，領域 I，II，III において，$\psi(x)$をそれぞれ $\psi_{\mathrm{I}}(x)$，$\psi_{\mathrm{II}}(x)$，$\psi_{\mathrm{III}}(x)$とあらわして良い．

[3] $E<V_0$のとき，粒子が障壁で反射されてxの負方向へ進む確率 R，および透過して領域 III に存在する確率 Tを，それぞれ計算せよ．

[4] $E<V_0$のとき，ポテンシャル障壁の幅 dが，侵入する粒子の量子力学的な波長に比して十分に厚いとき，透過率 Tは，近似的に$\exp\left\{-\frac{2d}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right\}$に比例することを示せ．

[5] 設問[4]の結果は$E<V_0$の場合でも，有限の確率で粒子がポテンシャル障壁をすり抜けられることを示している．この効果をなんと呼ぶか答えよ．

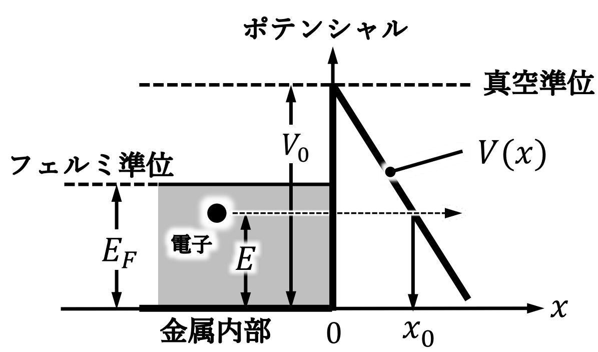

図４

金属表面に強い電界が加わると，電子が真空中に放出される現象を電界放出と言う．この現象を考察しよう．金属の表面に一様な電界Fを印加することにより，図４で示した様に，表面（$x=0$）でのポテンシャル（大きさ : V_0）によって金属内に閉じ込められた電子が感じるポテンシャル障壁の幅を薄く変化させることができる．電子が感じるポテンシャル$V(x)$は，金属内部（$x<0$）と金属外部($x \geq 0$)で異なり，正の定数eを電気素量として，

（次ページにつづく）

問題３のつづき

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V_0 - eFx & (x \geq 0) \end{cases}$$ とあらわすことができる.

強い電界Fを印加することにより，金属内の電子は，設問[5]で述べた効果により，金属の外に飛び出すであろう．エネルギーEを持つ電子の透過率T'は，設問[4]の結果を拡張することにより，$T' = \exp\{-\frac{2}{\hbar}\int_0^{x_0}\sqrt{2m(V(x)-E)}\,dx\}$と近似できる．ここで$x_0$は電子がポテンシャル障壁を抜けだす位置である．また図 4 中のE_Fはフェルミ準位を示す.

[6] 金属内で最も外に飛び出しやすい電子について，そのx_0をF，E_F，V_0などを用いて表せ.

[7] 最も外に飛び出しやすい電子の透過率 T'を印加電界 Fの関数として示せ.

[8] フェルミ準位から真空準位までの高さが 4.0 eVである金属に対して，電子の電界放出を誘起するにはどの程度の電界の大きさが必要か検討せよ．必要であれば次の物理定数：$\hbar \approx 1.0 \times 10^{\;34}$ J·s，電子の質量 $m \approx 9.0 \times 10^{\;31}$ kg，電気素量 $e \approx 1.6 \times 10^{\;19}$ C，および $\sqrt{2} \approx 1.4$，$\sqrt{5} \approx 2.2$ を用い，透過率 $T' = 0.4$（$\approx \exp(-1)$）程度を電子が外部に放出される目安として良い.

問題４

N 個の独立した粒子からなる孤立系の熱平衡状態を考える．各々の粒子は，$-\epsilon_0$ と ϵ_0 の 2 つのエネルギー状態しかとりえないとする．ϵ_0 のエネルギー状態にある粒子数から $-\epsilon_0$ にある粒子数を差し引いた数を M と書くと，全粒子のエネルギー ϵ は $\epsilon = M\epsilon_0$ である．ここで，ϵ_0 は正の実定数である．
次の問に答えよ．ただし，ボルツマン定数は k と書くこと．

[1] 状態の数 W_M を M，N をもちいて表せ．

[2] 系のエントロピー S を k，M，N をもちいて表せ．
なお，Stirling の近似，$\log n! \approx n \log n - n$，を使ってよい．

[3] 前問 [2] で求めたエントロピー S の表式に含まれる M が熱力学的平均値 $\langle M \rangle$ に等しいとき，温度を T として，逆温度 $\beta = \frac{1}{kT}$ と S との間に $\beta = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial E}$ という関係が成り立つ．ただし，E は内部エネルギー，すなわち ϵ の熱力学的平均値である．
β を ϵ_0，$\langle M \rangle$，N をもちいて表せ．

[4] 統計力学的な“負の温度”領域を考えない条件で $\langle M \rangle$ の取り得る範囲を示せ．

[5] 内部エネルギー E を ϵ_0，N，β をもちいて表せ．

[6] 比熱 C を ϵ_0，k，N，β をもちいて表せ．

[7] 前問 [6] の比熱 C の温度依存性のグラフを描け．ただし概形でよい．
また，ある物質の比熱の温度依存性の測定結果において，ここで議論したモデルが適用できると考えられた場合，データからなにを読み取ることが可能か，簡単に説明せよ．（30 文字程度）