物性物理科学 Ⅰ

注意：問題１から４までの各問に解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．１つの問題の解答が解答用紙２枚にわたるときは，２枚目にも問題番号を書き，２枚目であることを明示すること．

問題１

質量 M, 長さ l の均質な細長い棒 I および 棒 II を図１のように点Ｐで接続し，点 O から吊るす．２本の棒は，点Ｏおよび点Ｐを含む鉛直面内 ($x-y$ 面内) で摩擦なく回転できる．$+y$ 方向を鉛直下向きとする．棒 I と y 軸のなす角を θ_1, 棒 II と y 軸のなす角を θ_2 とする．以下の問いに答えよ．重力加速度を g とする．θ_1, θ_2 の１階および２階の時間微分を $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ および $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$ で表すこと．

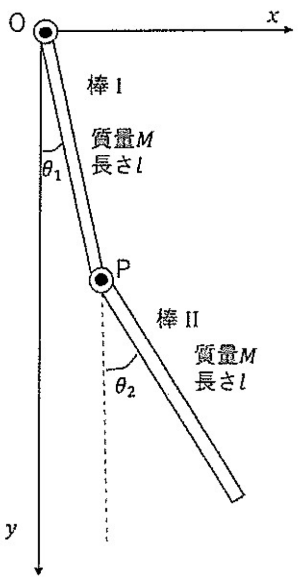

図１

[1] 棒 I の点 O のまわりの慣性モーメント I_O および 棒 II の重心のまわりの慣性モーメント I_G がそれぞれ下記で表されることを示せ．導出の過程も記すこと．

$$I_\mathrm{O}=\frac{1}{3}Ml^2, \qquad I_\mathrm{G}=\frac{1}{12}Ml^2$$

[2] 系の運動エネルギー T を，M, l, g, θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ のうち必要なものを用いて記せ．

[3] 系の位置エネルギー U および ラグランジアン $L=T-U$ を，M, l, g, θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ のうち必要なものを用いて記せ．

[4] θ_1, θ_2 に対するラグランジュの運動方程式を書け．

[5] θ_1 および θ_2 が微小であるとし，以下の近似を用いて前問 [4] で求めた運動方程式を簡略化せよ．$\cos(\theta_2-\theta_1)\approx 1$, $\sin\theta_1\approx\theta_1$, $\sin\theta_2\approx\theta_2$, $\dot{\theta}_1{}^2\approx 0$, $\dot{\theta}_2{}^2\approx 0$, $\ddot{\theta}_1{}^2\approx 0$, $\ddot{\theta}_2{}^2\approx 0$.

[6] 定数 C_1 および C_2 を用いて，$\theta_1=\mathrm{Re}[C_1\exp(\mathrm{i}\phi t)]$, $\theta_2=\mathrm{Re}[C_2\exp(\mathrm{i}\phi t)]$ とおき，前問 [5] で求めた運動方程式を解いて，微小振動の基準角振動数 ϕ を求めよ．i は虚数単位 ($\mathrm{i}^2=-1$), t は時間，$\mathrm{Re}[\cdots]$ は $[\cdots]$の実部を表す．

問題２

帯電していない物質に電磁波を照射したとき，物質に生じる力を計算したい．物質は真空中に置かれている．電磁波が真空中を伝播する場合，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は以下の関係式を満たす．

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (1)$$

ここで，c は光速である．さらに，$\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{B}$ も平面波である．すなわち $\boldsymbol{k}$ を波数ベクトル，$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトル，ω を角振動数，t を時間，$\boldsymbol{E}_0$ および $\boldsymbol{B}_0$ を定ベクトルとして，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t), \qquad (2)$$

と書けるとする．

[1]　上の式(1), (2)から，$\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の方向の関係を記せ．さらに，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ の絶対値の比を答えよ．解答の際，導出の過程もそれぞれ示せ．

物質に電磁波が照射されると,電場によって物質中の電子の位置座標が変化することで分極 $\boldsymbol{P}$ が生じる.$\boldsymbol{P}$ は,電子の質量を m, 電荷を $-e$,電場 $\boldsymbol{E}$ による変位を $\boldsymbol{u}$, 数密度を N とすると，$\boldsymbol{P}=-Ne\boldsymbol{u}$ と書ける．変位 $\boldsymbol{u}$ は調和振動子の運動方程式に従うと仮定して $\boldsymbol{P}$ を求めよう．電子にはさらに摩擦力 $-m\gamma\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$($\gamma$ は定数)が働くものとし,調和振動子の振動数を ω_0 とする．以下では,物質は電磁波の波長に比べて十分小さく,その大きさを無視できるものとし,常に $\boldsymbol{r}$=0 に置かれているとする.

[2]電場 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t)$ が物質に加えられた場合の電子の運動方程式を書け．ただし,電子間の相互作用は無視する.次に,この方程式を $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{E}_0[X\cos(\omega t)+Y\sin(\omega t)]$ の形を仮定して解き，X,Y を求めよ.さらに,その結果を用いて,分極 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

発生する分極によって生じる分極電流 $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{J}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ と定義できる．この電流に働くローレンツ力 $\boldsymbol{F}$ は，以下のように書かれる．

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\times\boldsymbol{B}. \qquad (3)$$

この力 $\boldsymbol{F}$ が電磁波照射によって物質に生じる力であるとみなせる．

[3] 式(2), (3) および問[1], [2]の結果を用いて，物質に生じる力 $\boldsymbol{F}$ を求めよ．結果は，ω, t, c, N, e, $|\boldsymbol{E}_0|$, および問[2]の X, Y を用いて表せ．ただし，問[2]で求めた X, Y の表式を代入する必要はない．また，力の方向も示せ．

[4] 問[3]の結果を電磁波の一周期に渡って時間 t で積分し，周期で割り算することによって時間平均された力を求めよ．

問題３

質量 m の粒子の状態を量子力学的に取り扱った一次元調和振動子を考える．粒子の座標を x, 運動量を p, 固有角振動数を ω としたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

で表される．以下の問いに答えよ．ただし，最終的な答だけでなく，答に至る考え方・過程も記すこと.

[1] 以下の式で定義された演算子を考える．ただし，プランク定数 h を 2π で割った定数を $\hbar$ とし，i は虚数単位($\mathrm{i}^2 = -1$)である．

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}p)$$

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}p)$$

この２つの演算子の間の交換関係 $[a, a^\dagger]$ を求めよ．

[2] $a^\dagger a, \hbar, \omega$ を用いて上記ハミルトニアン$\mathcal{H}$を表せ．

[3] このハミルトニアンの，基底エネルギーから n 番目の固有エネルギーに対する固有関数 $X_n(x)$ は $z = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ として

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2m\omega/\hbar}}{2^n n!}} F_n(z)$$

である．ただし n は 0 以上の整数である．基底状態は $n = 0$ に相当する．ここで $F_n(z)$ は

$$F_{n+1}(z) = (z - \frac{d}{dz})F_n(z)$$

$$2nF_{n-1}(z) = (z + \frac{d}{dz})F_n(z)$$

の関係を満たす．このハミルトニアンの固有エネルギーを求めよ．

[4] 上記ハミルトニアン$\mathcal{H}$に新たな項

$$\mathcal{H}'_1 = \alpha x$$

が加わった場合を考える（この粒子が電荷をもつとき，一様な電場がかかった状況に該当する)．ここで α は定数である．新たな項の効果が一次元調和振動子の項に比べて小さく摂動として扱うことができる場合，固有エネルギーは新たな項 $\mathcal{H}'_1$ が加わっても一次の摂動では変化しないことを示せ．

[5] 上記ハミルトニアン$\mathcal{H}$に前問[4]とは別の新たな摂動項

$$\mathcal{H}'_2 = \beta x^4$$

が加わった場合を考える（これは非調和振動の一種とみなせる)．ここで β は定数である．このときの一次の摂動による固有エネルギーの変化が

$$\frac{3\beta\hbar^2}{4m^2\omega^2}(C_1 n^2 + C_1 n + C_2)$$

で与えられることを示し，整数 C_1, C_2 を求めよ．

問題4

[1] 体積 V の箱の中を運動する質量 m の同種粒子からなる自由粒子 N 個を考える．この系の古典的ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} \tag{1}$$

ここで，$p_j = (p_{x,j}, p_{y,j}, p_{z,j})$ は j 番目の粒子の運動量を表す．以下の問いに答えよ．なお，計算の過程も示すこと．

必要であれば，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$ を用いて良い．また，h, k_B はそれぞれプランク定数，ボルツマン定数であり，$\hbar = h/(2\pi)$ とする．

(a) 温度 T が与えられたときの N 個の自由粒子系の古典的分配関数は一般に

$$\mathcal{Z} = A \int dr_1 \cdots \int dr_N \int dp_1 \cdots \int dp_N \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{k_\mathrm{B}T}\right) \tag{2}$$

と与えられる．$r_j = (x_j, y_j, z_j)$ は j 番目の粒子の座標を表す．A の表式を書け．また，そのような因子 A が必要な理由についても簡単に述べよ．

(b) この系の分配関数 $\mathcal{Z}$ とヘルムホルツ自由エネルギー $\mathcal{F}$ を求めよ．

(c) (b) の結果を用いて状態方程式 $PV = Nk_\mathrm{B}T$ が成り立つことを示せ．ただし，P は圧力である．

(d) 熱力学第3法則によると，系のエントロピー S は $\lim_{T\to 0} S = 0$ を満たすべきである．これは絶対零度における系の基底状態が一意に決まることを意味している．古典的理想気体は熱力学第3法則を満たすかどうか理由とともに答えよ．

[2] 量子力学に従う互いに独立な粒子の一般的なモデルとして，離散エネルギー準位 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \cdots$ を持つ系を考えよう．エネルギー準位は無限にあるとして，簡単のため1粒子のみを考える．また，エネルギー準位は縮退していないとする．この系が熱力学第3法則を満たしていることを示すため，$\lim_{T\to 0} S = 0$ を示せ．

[3] 量子力学によると同種粒子は区別することができない．このことを考慮すると，理想気体はフェルミ統計かあるいはボース統計のいずれかに従う．1粒子エネルギーを ε, 化学ポテンシャルを μ とすると，温度 T でのフェルミ分布関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(k_\mathrm{B}T)} + 1} \tag{3}$$

となる．以下ではフェルミ統計に従う N 個の自由粒子からなる理想気体を考える（スピン自由度は無視する）．1粒子エネルギー ε の状態密度を $D(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{(2\pi\hbar)^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$（$V$ は体積，m は粒子の質量）として以下の問いに答えよ．

(e) この系のフェルミエネルギー ε_F を N, V の関数として求めよ．

(f) $T = 0$ における圧力 $P = -\partial E/\partial V$ を求めよ．ここで，E は $T = 0$ での系の全エネルギーを表す．

(g) (f) の結果と (c) の古典近似の結果との違いについて，フェルミ理想気体の基底状態の特徴を説明しながら述べよ．