2019年度大阪大学大学院基礎工学研究科博士前期課程（一般）入学試験

物性物理科学 II

注意：問題１から４のうち 3 問を選択して解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．1 つの問題の解答が解答用紙 2 枚にわたるときは，2 枚目にも問題の番号を書き，2 枚目であることを明示すること．解答用紙にはどの問題を選択したかをはっきり分かるように解答すること．4 問を解答した場合，最終的に選択しなかった問題の解答には筆答試験時間中に大きく×印をつけるなどして選択した 3 問が分かるようにすること．

問題１

以下の文章を読んで空欄の中に入るものとして，もっとも適当と思われる用語，式または数値を次ページの選択肢から選んでその記号を記入せよ．

半導体には p 型半導体と n 型半導体があるが，n 型半導体ではフェルミ準位が [1] のバンド端付近にあるために [2] が多数キャリアとなる．例えば Si を n 型半導体にするには [3] などを不純物としてドープする．ドープされた不純物は室温ではイオン化してキャリアを [1] に放出する．イオン化した不純物は空間電荷を形成する．

p 型半導体と n 型半導体を接合するとフェルミ準位の違いから n 型半導体から p 型半導体に電子が，p 型半導体から n 型半導体にホールが注入される．すると p 型半導体は負に帯電し，n 型半導体は正に帯電する．この結果バンドに屈曲が生じ，p 型半導体と n 型半導体のフェルミ準位が一致してキャリアの注入が止まる．注入されたキャリアは対消滅するので pn 接合界面にはキャリアの存在しない空乏層が形成される．空乏層内にはイオン化した不純物が空間電荷として残る．p 型半導体中の負イオンと n 型半導体中の正イオンは [4] を形成し空乏層の両端には電位差 V_D が生じる．この電位差は拡散電位とよばれる．

次に外部から電圧を印加しないときの空乏層の厚さについて考える．p 型半導体内と n 型半導体内の不純物による空間電荷の密度をそれぞれ $-\rho_p, \rho_n$ ($\rho_p, \rho_n > 0$)とする．空乏層の外側では半導体の伝導性が高く，電場が生じないことから，$\rho_p : \rho_n = 20 : 1$ とするとき p 型半導体側と n 型半導体側にできる空乏層の厚さの比は [5] である． そこで，以下では，p 型半導体内にできる空乏層中に発生する拡散電位を無視し(すなわち V_D をもたらす電場が n 型半導体側のみに生じたと仮定する)， n 型半導体内の空乏層の厚みをポアソン方程式を解くことにより求めると， [6] となる．ただし， $V_D = 0.6$ V, $(\rho_p/e) = 1\times10^{24}$ m^{-3}, $(\rho_n/e) = 5\times10^{22}$ m^{-3}, 比誘電率を p 型 n 型ともに $\varepsilon_r = 12$ とした．また，真空の誘電率を $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ F/m, 電気素量を $e = 1.6\times10^{-19}$ C とした．

さらに，外部からバイアス電圧 V を印加したとき，この pn 接合の単位面積当たりの微分静電容量を式で表すと [7] と近似できる．この式より，微分静電容量のバイアス電圧依存性から ρ_n の空間分布を見積もることができることが分かる．ここで，微分静電容量は空乏層内の正の空間電荷の量をバイアス電圧で微分したものに等しい．

（次ページに続く）

問題 1 の続き

選択肢

	ア	イ	ウ	エ	オ
[1]	1s 準位	伝導帯	真空レベル	価電子帯	スポラディック E 層
[2]	エキシトン	ホール	負イオン	電子	スキルミオン
[3]	リン	インジウム	ヘリウム	ガリウム	水素
[4]	非磁性層	ヴァン・アレン帯	酸化層	超伝導層	電気二重層
[5]	$20:1$	$1:20$	$\sqrt{20}:1$	$1:\sqrt{20}$	$1:400$
[6]	約 0.13 nm	約 13 nm	約 130 nm	約 1.3 μm	約 13 μm
[7]	$\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{\rho_\mathrm{n}V}}$	$\sqrt{\dfrac{2\varepsilon_r\varepsilon_0\rho_\mathrm{n}}{V}}$	$\sqrt{\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{2\rho_\mathrm{n}\left(V+V_\mathrm{D}\right)}}$	$\sqrt{\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0\rho_\mathrm{n}}{2\left(V+V_\mathrm{D}\right)}}$	$\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0\sqrt{2\rho_\mathrm{n}}}{V+V_\mathrm{D}}$

問題２

磁性体に関する以下の問いに答えよ．

[1] 次の物質(i)〜(iv)が示す帯磁率（または磁化率，磁気感受率とも表される）χ の温度 T に対する依存性を表すグラフとして，もっとも妥当と考えらえるグラフを，下記の図 1 中の (a)〜(h) からそれぞれ一つ選べ.

物質 ：(i) 強磁性体，(ii) 反強磁性体，(iii) 局在スピンを持たない反磁性体，(iv) 局在スピンを持たない常磁性を示す金属.

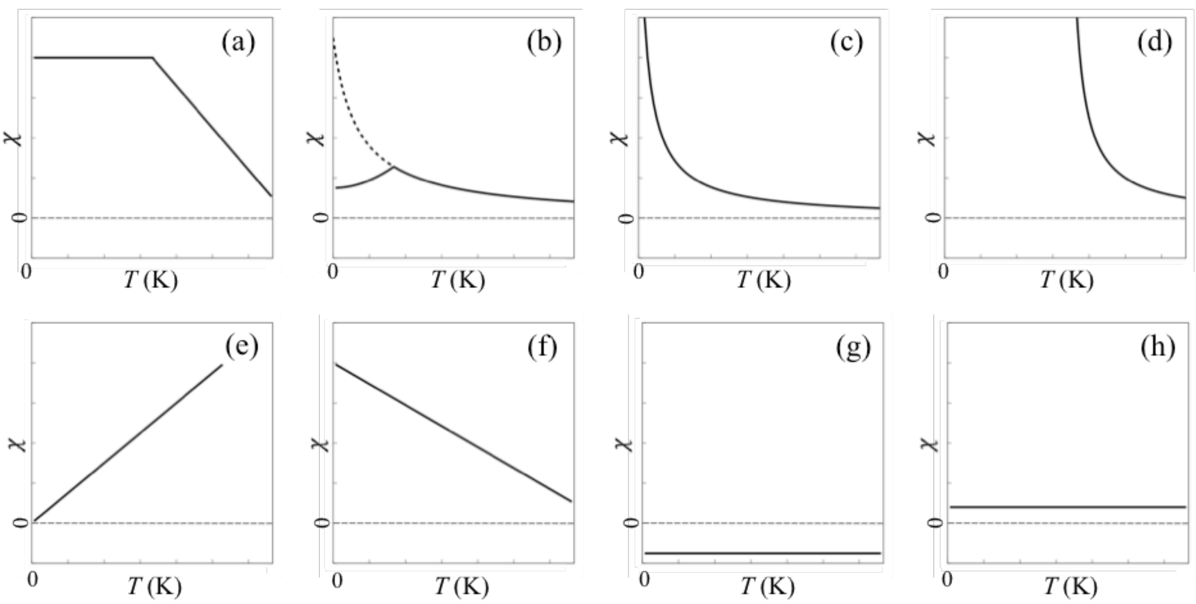

図 1 グラフ中の実線が帯磁率の温度依存性を示す． (b)の破線曲線は，高温領域の帯磁率の温度変化を低温領域へ理論的に外挿した曲線を示す．各グラフの X 軸，Y 軸とも線形スケールで示されており，また零点（0）も示している．

[2] 強磁性体について，相転移温度 T_C 以下での磁化 M の温度依存性を示すグラフの概形を記せ．

[3] 室温（300 K）かつ常圧（1 気圧）で強磁性となる単体金属をすべて記せ．

（次ページに続く）

問題２のつづき

Landau は単純な現象論を展開して，相転移の本質を見抜いた．この理論を強磁性相転移に適用しよう．マクロスコピックな磁化 M を秩序変数として，M は強磁性転移温度 T_C 近傍で非常に小さく，自由エネルギーが Taylor 展開できると仮定する．高温相では $M = 0$ であり，低温相（強磁性相）では $M \neq 0$ であるような相転移が $T = T_\mathrm{C}$ で起きるものとし，この時 Landau の自由エネルギー F が以下のように表せるとする．

$$F = \sum_n \alpha_n M^n \quad --- (1)$$

[4]　n が奇数の場合の係数 α_n はゼロと要請される．その理由を説明せよ．

2 次相転移の場合，正の値をもつ定数 β を用い，Landau の自由エネルギー F は式(1)について M を 4 次まで展開して，

$$F = \frac{1}{2}\alpha M^2 + \frac{1}{4}\beta M^4 \quad --- (2)$$

と書き下される．　ただし $\alpha = 2\alpha_2$，$\beta = 4\alpha_4$ とした．

[5]　平衡状態は(2)式の自由エネルギーが最小となる条件で与えられる．　温度 T と正の定数 α_0 を用いて，$\alpha = \alpha_0(T - T_\mathrm{C})$ と係数を展開したときに，強磁性相転移温度 T_C 以上の高温相において平衡状態では $M = 0$ となることを示せ．また T_C より低い低温相（強磁性相）において，$M \neq 0$ が平衡状態における解として満たされることを示し，その時の磁化 $M = M_0$ を α_0，β，T，T_C を用いて表せ．

[6]　低温相（強磁性相）での自由エネルギー F の磁化依存性を示すグラフの概形を図示し，その特徴を説明せよ．

問題３

典型的な金属の電気伝導について次の問いに答えよ．ここで，典型的な金属とは、巨視的なサイズをもつものとして考えよ．

必要であれば以下の物理定数等を使ってもよい．

電気素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C，プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s，$\hbar = h/(2\pi) = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s，電子の質量 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，$3.61^3 \sim 47.0$，$\sqrt[3]{3\pi^2} \sim 3.09$，$\sqrt[3]{4} \sim 1.59$.

[1] 体積 V の 3 次元空間を占める粒子数 N の自由電子系について，

（a）Fermi 波数 $k_{\rm F}$ を V，N の関数として示せ．

（b）Fermi エネルギー $E_{\rm F}$ を V，N の関数として示せ．

但し，電子はスピン 1/2 のフェルミ粒子であることに留意せよ．

[2] 銅の結晶構造は面心立方構造であり，その格子定数は $a = 0.361$ nm である．伝導電子が銅原子 1 個当たり 1 つ供出されるとして，伝導電子密度 $n = N/V$ を有効数字 2 桁で求めよ．

[3] 銅の伝導電子が自由電子気体としてふるまうものと考え，

（a）Fermi 波数 $k_{\rm F}$ を有効数字 2 桁で求めよ．

（b）Fermi エネルギー $E_{\rm F}$ を有効数字 2 桁で求めよ．

[4] 金属の電気伝導を，高速で散乱されながら運動する多数の伝導電子が，短い緩和時間の間に外部電場による加速を受けて見かけ上の一定速度（ドリフト速度）で電場方向に運動するものとして記述する（Drude モデル）．

（a）電気伝導度 σ を，伝導電子の有効質量 m^* と伝導電子密度 n，電気素量 e，平均緩和時間 τ を用いて示せ．

（b）室温（300 K）において銅の電気抵抗率を測定すると $\rho = 16.8$ nΩ·m であった．銅の電気伝導が Drude モデルにしたがい，かつ有効質量は電子の質量に等しいと考えて平均緩和時間 τ を有効数字 2 桁で求めよ．

（c）前問の銅が残留抵抗比（RRR: residual resistivity ratio），$\rho(300\ {\rm K})/\rho(4.2\ {\rm K}) = 10000$ の超高純度銅であった場合，4.2 K での平均自由行程 l を有効数字 2 桁で求めよ．

問題４

直交座標系 (x, y, z) を用い，孤立した原子と x 方向に偏光した光とが相互作用した場合の遷移確率を計算しよう．時刻 t に依存する外場（光）が存在するときのハミルトニアン $\hat{H}$ が，

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\mathrm{int}}(t)$$

という形で表されるとする．$\hat{H}_0$ は外場がないときのハミルトニアンで，$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t)$ は光と原子の相互作用を表す摂動のハミルトニアンである．原子核のポテンシャルに束縛された電子の波動関数は光の波長に比べて十分局在しているとし，

$$\hat{H}_{\mathrm{int}}(t) = -e\hat{x}E_0\cos\omega t$$

なる相互作用の形を考える．ただし e は電気素量，E_0 は電場の振幅，ω (> 0) は光の角周波数であり，$\hat{x}$ は電子の座標演算子の x 軸に平行な成分である．以下の問いに答えよ．

[1] 原子は二つの準位を持つと考え，ハミルトニアン $\hat{H}_0$ には，固有エネルギー，固有関数がそれぞれ $\varepsilon_0, \phi_0(\mathbf{r})$ の基底状態と，$\varepsilon_1, \phi_1(\mathbf{r})$ の励起状態があるとする．すなわち，$\hat{H}_0\phi_j(\mathbf{r}) = \varepsilon_j\phi_j(\mathbf{r})$ $(j = 0,1)$ が満たされている．このとき，上記の光による摂動により状態は

$$\Psi(\mathbf{r},t) = a_0(t)\phi_0(\mathbf{r})\exp\left(-\mathrm{i}\varepsilon_0 t/\hbar\right) + a_1(t)\phi_1(\mathbf{r})\exp\left(-\mathrm{i}\varepsilon_1 t/\hbar\right)$$

なる重ね合わせになる．ここで $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数、また $\mathrm{i}^2 = -1$ である．$\Psi(\mathbf{r},t)$ をハミルトニアン $\hat{H}$ のシュレディンガー方程式に代入することにより，$a_0(t), a_1(t)$ が満たす方程式を書き下せ．

[2] 初期状態で系は基底状態 ϕ_0 にあったとし，$t = 0$ から摂動が加わったとする．双極子遷移の行列要素

$$x_{01}\left(\equiv \int \phi_0{}^*(\mathbf{r})\hat{x}\phi_1(\mathbf{r})d\mathbf{r}\right)$$

を用いて $a_1(t)$ を表現せよ．

（次ページに続く）

問題４のつづき

[3] ここで基底状態から遷移する際に共鳴を示す項のみを考えることにする．公式

$$\frac{1}{\pi}\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2\left(\alpha t/2\right)}{\alpha^2 t/2}=\delta(\alpha)$$

を利用して十分長い時間が経った時の励起状態の占有確率 $\left|a_1(t)\right|^2$ の表式を求めよ．但し $\delta(\alpha)$ はデルタ関数である．さらに単位時間あたりの遷移確率を記せ．

[4] 次に原子の基底状態が 1s 状態, また励起状態が 2s, 2p$_x$, 2p$_y$, 2p$_z$ 状態のいずれかの状態であるとする．基底状態からの遷移が許されない励起状態を全て挙げよ．また，許されない理由によってそれらを２つのグループに分け，それぞれに対してその理由を述べよ．（x_{01} を具体的に導出する必要はない．）