2019年度大阪大学大学院基礎工学研究科博士前期課程（一般）入学試験

物性物理科学Ｉ

注意：問題１から問題４までの各問に解答し，各問題の答えを別々の解答用紙に記入すること．１つの問題の解答が解答用紙２枚にわたるときは，２枚目にも問題の番号を書き，２枚目であることを明示すること．

問題１

図１のように質量 m の２個の質点が，固定された壁の間に x 軸に平行な３本のばねによってつながれている．外側２本のばねのばね係数を k_1，中央のばねのばね係数を k_2 とする．２つの質点は平衡位置の周りで微小振動している．ある時刻 t における平衡位置からの変位をそれぞれ x_1，x_2 とする．なお，摩擦はないものとする．

[1] この系のラグランジアン L が $L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1{}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2{}^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)(x_1{}^2+x_2{}^2)+k_2x_1x_2$ で表されることを示せ．なお $\dot{x}_1$，$\dot{x}_2$ は x_1，x_2 の時間微分を表す．

[2] x_1, x_2 についての運動方程式がそれぞれ $m\ddot{x}_1=-(k_1+k_2)x_1+k_2x_2$, $m\ddot{x}_2=k_2x_1-(k_1+k_2)x_2$ となることを示せ．なお $\ddot{x}_1$，$\ddot{x}_2$ は x_1，x_2 の時間についての２階微分を表す．

[3] $x_1=a\cos(\omega_1 t+\alpha)+b\cos(\omega_2 t+\beta), x_2=a\cos(\omega_1 t+\alpha)-b\cos(\omega_2 t+\beta)$ がこの連立微分方程式の解となる(a，b，α，β は定数)．この時の ω_1，ω_2 を求めよ．

[4] 両質点の運動は単振動の和である．角振動数 ω_1 の振動における両質点の運動の様子と，角振動数 ω_2 の振動における両質点の運動の様子の違いを 50 字以内で述べよ．

図２のように質量 M，半径 r の２つの円盤が， 固定された壁の間に x 軸に平行な３本のばねによってつながれて平衡状態にある．これらの円盤は固定された中心を軸に xy 平面内を摩擦なく回転する．これらの円盤の上端と両側の壁をつなぐばねのばね定数を k_1，下端同士をつなぐばねのばね定数を k_2 とする．いまこれらの円盤は平衡位置の周りで微小振動しており，平衡位置からの変位角を θ_1，θ_2 とする．このとき x 軸方向の変位は $r\theta_1$，$r\theta_2$ と表される．

[5] この系のラグランジアン L を求めよ．(この運動における円盤の慣性モーメント I は $I=Mr^2/2$ であることに留意せよ)

[6] この系の固有振動数 ω_3，ω_4 を求めよ．

（次ページに続く）

問題１のつづき

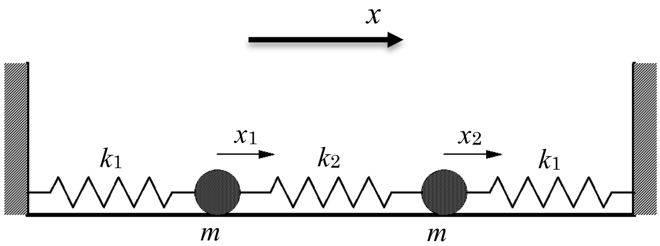

図１

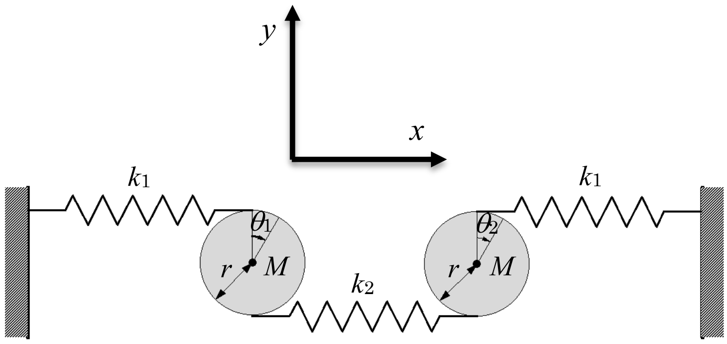

図２

問題２

半径 a の無限に長い中空円筒導体 A の外に，半径 b の無限に長い中空円筒導体 B が中心軸を一致させて真空中に置かれている．図３にその断面を示す．ここで $b > a$ とし，中空円筒導体の厚みは無視できるくらい薄いとする．今，導体 A の軸方向（図中 z 軸の正の向き）に定常電流 I が，導体 B にはその逆向きに定常電流 I が一様な線密度で流れている．真空および導体の透磁率を μ_0 とし，SI 単位系を用いる．
次の各問いに答えよ．

[1]　両導体の中心軸からの距離 r における磁束密度の大きさ $B(r)$ を求め，その r 依存性を図示せよ．また，発生する磁場の向きも示せ．(3 つの領域 (i) $0 < r < a$,　(ii) $a \leqq r \leqq b$, (iii) $r > b$ があることに留意せよ)

[2]　発生する磁束 Φ は定常電流 I と自己誘導係数 L を用いて　$\Phi = LI$ と与えられる．この同軸導体の単位長さあたりの自己誘導係数 L を求めよ．

[3]　導体の単位長さあたりに蓄えられている磁場のエネルギーを求めよ．また，そのエネルギーはどの空間部分に蓄えられているか答えよ．

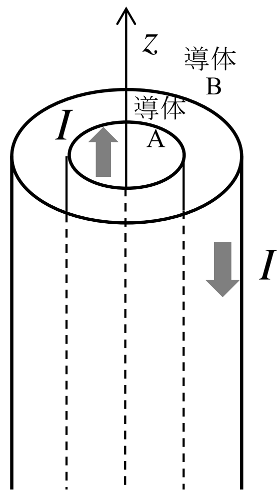

図３

次に，導体 A の代わりに半径 a の無限に長い円柱状の導体 A’を置いた状況を考える．定常電流 I は円柱内を一様な密度で z 軸の正の向きに流れ，外側の導体 B にはその逆向きに定常電流 I が流れているとする．

[4]　両導体の中心軸からの距離 r における磁束密度の大きさ $B(r)$を求めよ．また，横軸を r として，その $B(r)$ を図示せよ．

[5]　このとき単位長さあたりに蓄えられている磁場のエネルギーを求めよ．また，[3]の結果との差はどの空間からの寄与であるか答えよ．

問題３

厚さの無視できる半径 a，長さ L の円筒状シート面上に電子が一個ある（図４）．円筒中心軸を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いる．スピン自由度を無視し，円筒状シート面で一定ポテンシャルの下での電子の波動関数 $\phi(\theta, z)$ を考える．円筒の下端 $z = 0$ と上端 $z = L$ で電子の波動関数は 0 になる．m は電子質量，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割った定数，e は電気素量，i は虚数単位とする（$\mathrm{i}^2 = -1$）．SI 単位系を用いる．

円柱座標系 (r, θ, z) を用いると，この電子に対する定常状態シュレーディンガー方程式は次のようになる．ここで E はエネルギー固有値である．

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = E\phi$$

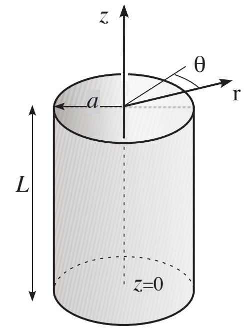

図４

[1]　電子の波動関数 $\phi(\theta, z)$ は変数分離できる，すなわち

$$\phi(\theta, z) = Y(\theta)Z(z)$$

と表わせるとして，それぞれの成分 $Y(\theta)$，$Z(z)$ が満たすべき方程式を求めよ．ここでエネルギー固有値 E は，θ，z 成分に対する固有値 E_θ と E_z の和 $E = E_\theta + E_z$ で表されるとする．

[2]　固有関数 $Y(\theta)$，$Z(z)$，およびそれぞれの固有値 E_θ と E_z を求めよ．固有関数の規格化はしなくて良い．

[3]　円筒内部に一様な磁束密度 $\vec{B} = (0, 0, B)$ を導入する．ここでは直交座標を用いている．円筒外部では磁束密度は 0 である．この磁束密度はベクトルポテンシャル $\vec{A}$

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$$

から得られることを示せ．なお，$\vec{B}$ は外部から印加された磁束密度とは等しくならず円筒内部の全磁束密度となる．

[4]　磁場があるときのシュレーディンガー方程式は $\vec{\nabla}$ を $\vec{\nabla} - \mathrm{i}(e/\hbar)\vec{A}$ と置き換えたもので表される．今の場合 $Y(\theta)$ 成分だけがこの変更を受け，この成分に関する方程式に現れる $(1/a)d/d\theta$ のところを

$$\frac{1}{a}\frac{d}{d\theta} - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}A_r$$

と置き換えたものとなる．A_r は $r = a$ における $\vec{A}$ の絶対値である．このときの $Y(\theta)$ の固有値を求めよ．円筒内部の磁束 $\Phi = \pi a^2 B$ および $2\pi\hbar/e = \Phi_0$ を使って表しても良い．

[5]　磁場が存在しても $Y(\theta)$ の固有値が変化しないと仮定すると，磁束の量子化 $\Phi = n\Phi_0$（n は整数）が得られることを示せ．なお，実際には色々な効果により固有値は変化する．

問題 4

振動数 ν をもち，熱平衡状態にある N 個 の量子力学的な一次元調和振動子 $(1, 2, \cdots, N)$ からなる孤立系を考える．この系の全エネルギー E は，

$$E = \frac{N}{2}h\nu + Mh\nu \qquad (M \text{ は整数})$$

と表される．ただし，h はプランク定数，$N \gg 1$，$M \gg 1$ である．次の問いに答えよ．

[1]　まず i 番目 $(1 \le i \le N)$ の振動子一つを考える．この振動子の量子数が n_i であるとき，その振動子のエネルギーを書け．

[2]　M を各振動子の量子数 n_i を用いて表せ．

[3]　量子数 n_i の値として $n_i = 0$ も許されることに注意し，全エネルギーが E である状態の熱力学的重率 W_M を求めよ．

[4]　この系のエントロピー S は，ボルツマン定数 k_B を用いて，

$$S = k_\mathrm{B}\{(M+N)\log(M+N) - M\log M - N\log N\}$$

となることを導け．その際，Stirling の公式 $\log x! \simeq x\log x - x \ \ (x \gg 1)$ を用いても良い．

[5]　[4] のエントロピー S から，全エネルギー E を，N，$h\nu$，k_B，および温度 T を用いて表せ．

[6]　$E/(Nh\nu)$ を $k_\mathrm{B}T/(h\nu)$ に対してプロットした図として最も適切なものを図 5 の (a)〜(f) から選べ．

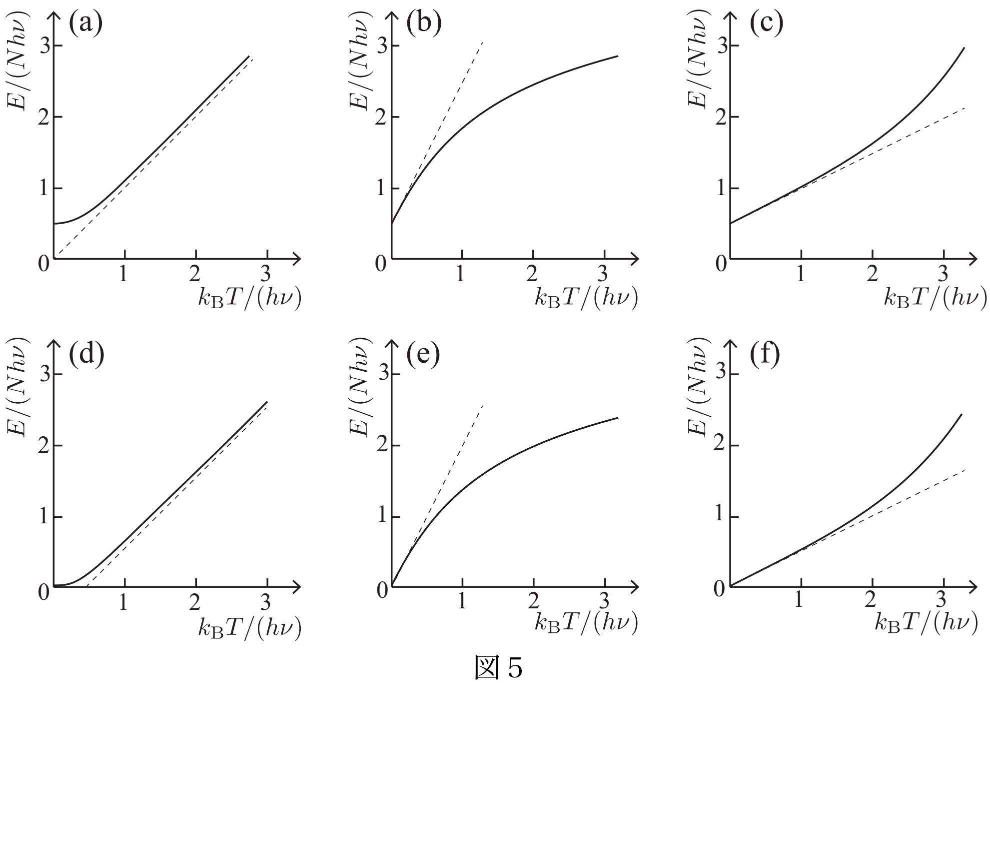

図 5